ALBRECHT, R., u. G. KARRER
Math. Zeitschr. 74, 387–391 (1960)

Fixpunktsätze in uniformen Räumen

Herrn JOSEF LENSE zum 70. Geburtstag am 28. Oktober 1960 gewidmet

Von
RUDOLF ALBRECHT und GUIDO KARRER

Die vorliegende Arbeit schließt an Untersuchungen von L. KANTOROVITCH [1], J. WEISSINGER [2] und J. SCHRÖDER [3] an und gibt eine abstrakte Verallgemeinerung gewisser Fixpunktsätze über kontrahierende Abbildungen im Rahmen der Theorie der uniformen Räume. An Stelle der in [3] angegebenen Definition „verallgemeinerter Abstände" wird eine andere eingeführt, die Räume mit einem solchen Abstandsbegriff als Spezialfälle von uniformen Räumen ausweist.

1. Hilfssätze

Sei E ein topologischer Raum, f eine Abbildung von E in E. Ferner sei $\mathfrak{B}$ eine (eigentliche) Filterbasis auf E (bezüglich der Ordnung $\leqq$, die durch die mengentheoretische Inklusion $\subseteqq$ gegeben ist) und es sei für eine beliebige Filterbasis $\mathfrak{C}$ auf E mit $\mathrm{Fi}\,\mathfrak{C}$ der durch $\mathfrak{C}$ erzeugte Filter, mit $L_{\mathfrak{C}}$ die Menge der Limites von $\mathfrak{C}$, mit $A_{\mathfrak{C}}$ die Menge der Berührungspunkte von $\mathfrak{C}$ bezeichnet. Schließlich soll für beliebiges $x \in E$ der Umgebungsfilter von x mit $\mathfrak{U}_x$ bezeichnet werden. Wir nehmen an, daß $L_{\mathfrak{B}} \neq \emptyset$ ist.

LEMMA 1. *Ist f stetig auf $L_{\mathfrak{B}}$ und* $\mathrm{Fi}\,\mathfrak{B}$ *feiner als* $\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{B})$, *dann ist* $f(L_{\mathfrak{B}}) \subseteqq L_{\mathfrak{B}}$.

BEWEIS. f stetig auf $L_{\mathfrak{B}}$ heißt: Für beliebiges $x \in L_{\mathfrak{B}}$ ist $\mathfrak{U}_{f(x)} \subseteqq \mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{U}_x)$. Da x Limes von $\mathfrak{B}$ ist, gilt $\mathfrak{U}_x \subseteqq \mathrm{Fi}\,\mathfrak{B}$. Deshalb ist $\mathfrak{U}_{f(x)} \subseteqq \mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{U}_x) \subseteqq \mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{B})$. Damit hat man, weil $f(x)$ Limes von $\mathfrak{U}_{f(x)}$ ist, $f(x) \in L_{f(\mathfrak{B})}$ für jedes $x \in L_{\mathfrak{B}}$. Also gilt

$$f(L_{\mathfrak{B}}) \subseteqq L_{f(\mathfrak{B})}. \tag{1.1}$$

Nun ist $\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{B}) \subseteqq \mathrm{Fi}\,\mathfrak{B}$, also auch $L_{f(\mathfrak{B})} \subseteqq L_{\mathfrak{B}}$. Mit (1.1) folgt daher $f(L_{\mathfrak{B}}) \subseteqq L_{\mathfrak{B}}$.

LEMMA 2. *Ist f stetig auf $A_{\mathfrak{B}}$ und* $\mathrm{Fi}\,\mathfrak{B}$ *gröber als* $\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{B})$, *dann ist* $f(A_{\mathfrak{B}}) \subseteqq A_{\mathfrak{B}}$.

BEWEIS. f stetig auf $A_{\mathfrak{B}}$ heißt: Für beliebiges $x \in A_{\mathfrak{B}}$ ist $\mathfrak{U}_{f(x)} \subseteqq \mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{U}_x)$. Sei $x \in A_{\mathfrak{B}}$. Dann existiert ein Filter $\mathfrak{F}$, so daß $\mathrm{Fi}\,\mathfrak{B} \subseteqq \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{U}_x \subseteqq \mathfrak{F}$ [4, Chap. I, p. 49]. Deshalb ist $\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{B}) \subseteqq \mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{F})$ und $\mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{U}_x) \subseteqq \mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{F})$. Mit Obigem gilt $\mathfrak{U}_{f(x)} \subseteqq \mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{F})$. Es folgt $L_{f(\mathfrak{F})} \subseteqq A_{f(\mathfrak{F})} \subseteqq A_{f(\mathfrak{B})}$ und $f(x) \in A_{f(\mathfrak{B})}$ für jedes $x \in A_{\mathfrak{B}}$. Also ist

$$f(A_{\mathfrak{B}}) \subseteqq A_{f(\mathfrak{B})}. \tag{1.2}$$

Nun gilt $\mathrm{Fi}\,\mathfrak{B} \subseteqq \mathrm{Fi}\,f(\mathfrak{B})$, also ist $A_{f(\mathfrak{B})} \subseteqq A_{\mathfrak{B}}$. Mit (1.2) folgt deshalb $f(A_{\mathfrak{B}}) \subseteqq A_{\mathfrak{B}}$.

BEMERKUNGEN. 1. Ist E separiert, dann ist $L_{\mathfrak{B}} = A_{\mathfrak{B}} = \{x\}$ [4, Chap. I, p. 49]. Ist also $\mathfrak{B}$ mit $f(\mathfrak{B})$ vergleichbar, dann ist $x = f(x)$. 2. Ist E ein uniformer Raum, dann ist $L_{\mathfrak{B}} = A_{\mathfrak{B}}$ [4, Chap. II, p. 146, 148].

2. Fixpunktsätze für Abbildungen eines uniformen Raumes in sich

Sei E eine Menge, $\mathfrak{B}$ eine Filterbasis auf $E \times E$, die ein Fundamentalsystem von Umgebungen einer uniformen Struktur auf E ist. Wir betrachten den hierdurch gegebenen uniformen Raum und bezeichnen ihn wieder mit E.

Satz 1. *Sei f eine Abbildung von E in E; $M \subseteqq E$, $M \neq \emptyset$; $M_n = \bigcup_{\substack{l \in N \\ l \geqq n}} f^l(M)$, $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $n \in N$; ferner sei X die Menge der Limites von $\{M_n\}_{n \in N}$ und f stetig auf X. Dann gilt* (a) *$f(X) \subseteqq X$;* (b) *falls E separiert ist, $f(X) = X$ und X enthält höchstens ein Element.*

Beweis. $\{M_n\}_{n \in N}$ ist eine Basis des Elementarfilters von $\{f^n(M)\}_{n \in N}$. Ist $X = \emptyset$, dann ist $f(X) = X$. Sei $X \neq \emptyset$. Nach Voraussetzung ist f stetig auf X. Ferner ist $\mathrm{Fi}\{M_n\}_{n \in N}$ ebenso fein wie $\mathrm{Fi}\, f(\{M_n\}_{n \in N})$, denn $f(\{M_n\}_{n \in N}) = \{M_{n+1}\}_{n \in N}$. Also ist nach Lemma 1 $f(X) \subseteqq X$. (b) ist trivial.

Bemerkung. Statt Lemma 1 kann auch Lemma 2 zum Beweise benützt werden.

Satz 2. *Sei E separiert und f eine Abbildung von E in E. Für jede Wahl von $B \in \mathfrak{B}$, $y \in E$, $z \in E$ existiere ein $n \in N$, so daß $\{f^n(y), f^n(z)\} \times \{f^n(y), f^n(z)\} \subseteqq B$. Dann hat f auf E höchstens einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $y = f(y)$, $z = f(z)$, $y \neq z$. Dann existiert ein $B \in \mathfrak{B}$, so daß $(y, z) \notin B$, da E separiert. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, daß es ein n gibt, so daß $\{f^n(y), f^n(z)\} \times \{f^n(y), f^n(z)\} \subseteqq B$ ist, weil dann $(y, z) \in B$ wäre.

Satz 3. *Sei E separiert und vollständig, f eine Abbildung von E in E. Für jede Wahl von $B \in \mathfrak{B}$ und für ein $z \in E$ existiere ein $n \in N$, so daß $\{f^n(y), f^n(z)\} \times \{f^n(y), f^n(z)\} \subseteqq B$ für beliebiges $y \in E$ gilt. Dann existiert $x = \lim_{n \to \infty} f^n(z)$. Ist f stetig im Punkte x, so ist $x = f(x)$.*

Beweis. $\left\{\bigcup_{\substack{l \in N \\ l \geqq n}} f^l(z)\right\}_{n \in N}$ ist Basis eines Cauchy-Filters. Denn sei B' ein beliebiges Element von $\mathfrak{B}$ und $B \circ B \subseteqq B'$. Dann ist für beliebiges ganzzahliges $\varrho \geqq 0$ $\{f^{n+\varrho}(z), f^n(z)\} \times \{f^{n+\varrho}(z), f^n(z)\} \subseteqq B$. Folglich ist für beliebige ganzzahlige $\varrho \geqq 0$ und $\sigma \geqq 0$ $(f^{n+\varrho}(z), f^n(z)) \in B$ und $(f^n(z), f^{n+\sigma}(z)) \in B$, also $(f^{n+\varrho}(z), f^{n+\sigma}(z)) \in B'$. Damit gilt $\bigcup_{\substack{l \in N \\ l \geqq n}} f^l(z) \times \bigcup_{\substack{l \in N \\ l \geqq n}} f^l(z) \subseteqq B'$. Wegen der Vollständigkeit von E ist $\left\{\bigcup_{\substack{l \in N \\ l \geqq n}} f^l(z)\right\}_{n \in N}$ konvergent. Da E separiert ist, existiert nur ein Limes. Für diesen schreiben wir $x = \lim_{n \to \infty} f^n(z)$. Ist f stetig im Punkte x, so ist $x = f(x)$ nach Satz 1.

3. Erzeugung einer uniformen Struktur mittels verallgemeinerter Abstände

In Anwendungen werden uniforme Strukturen mittels des gewöhnlichen oder eines „verallgemeinerten" Abstandsbegriffes erzeugt. Sei H eine Menge $\{\varrho, \sigma, \tau, \ldots\}$ von Elementen $\varrho, \sigma, \tau, \ldots$. Auf H sei ein assoziatives, kommutatives inneres Kompositionsgesetz $(\varrho, \sigma) \to \varrho + \sigma$ erklärt für beliebiges $\varrho \in H$, $\sigma \in H$. In H existiere ein neutrales Element o. Ferner sei H geordnet durch eine Relation $\leqq$[1]). Schließlich gelte

$H1$: o sei kleinstes Element von H, $H' = H - \{o\}$ sei links filternd;

$H2$: zu beliebigem $\varrho \in H'$ existiere $\varrho' \in H'$, so daß $2\varrho' \leqq \varrho$;

$H3$: für beliebige Elemente ϱ, σ, τ aus H folge aus $\varrho \leqq \sigma$ daß $\varrho + \tau \leqq \sigma + \tau$ ist.

Aus $H3$ folgt: Ist $\mu \leqq \sigma$, $\varrho \leqq \tau$ dann ist $\mu + \varrho \leqq \sigma + \tau$. Aus $H2$ und $H3$ folgt $\varrho' \leqq 2\varrho' \leqq \varrho$.

Sei E eine Menge $\{x, y, z, \ldots\}$ von Elementen $x, y, z, \ldots$ und d eine Abbildung von $E \times E$ in H, so daß für beliebige Elemente x, y, z aus E gilt

$D1$: $d(x, x) = o$;

$D2$: $d(x, y) = d(y, x)$;

$D3$: $d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y)$.

Wir setzen für beliebiges $\varrho \in H'$ $B_\varrho = \overset{-1}{d}(\{\sigma \mid \sigma \in H, \sigma \leqq \varrho\})$. Dann ist $\{B_\varrho\}_{\varrho \in H'}$ ein Fundamentalsystem von Umgebungen einer uniformen Struktur auf E.

Beweis. Für beliebiges $\varrho \in H'$ ist $\Delta \subseteqq B_\varrho$ wegen $D1$. Aus $H1$ folgt, daß es zu beliebigem $\varrho \in H'$, $\varrho' \in H'$ ein $\varrho'' \in H'$ gibt, so daß $\varrho'' \leqq \varrho$ und $\varrho'' \leqq \varrho'$. Ferner gilt: Ist $\sigma \leqq \tau$, $\sigma \in H'$, so ist $B_\sigma \subseteqq B_\tau$. Somit ist $\{B_\varrho\}_{\varrho \in H'}$ eine Filterbasis. Wegen $D2$ ist $B_\varrho = \overset{-1}{B_\varrho}$. Sei schließlich ϱ ein beliebiges Element aus H'. Nach $H2$ existiert $\varrho' \in H'$, so daß $2\varrho' \leqq \varrho$, und nach $H3$ ist $\varrho' \leqq \varrho$. Infolge $D3$ ist $\overset{2}{B_{\varrho'}} \subseteqq B_{2\varrho'} \subseteqq B_\varrho$.

Sei f eine Abbildung von E in E und $z \in E$. Wir betrachten die Filterbasis $\left\{ \bigcup_{\substack{l \in N \\ l \geqq n}} f^l(z) \right\}_{n \in N}$ und setzen $z_l = f^l(z)$, $l \in N$. Diese Filterbasis ist nur dann konvergent, falls sie „beliebig kleine" Mengen enthält, das heißt, zu beliebig gewähltem $\varrho \in H'$ existiert $n \in N$, so daß

$$(3.1) \qquad d(z_k, z_l) \leqq \varrho \quad \textit{ist für beliebiges } k \geqq n \textit{ und } l \geqq n.$$

(3.1) ist erfüllt, falls

$$(3.2) \qquad \sum_{i=k}^{m} d(z_{i+1}, z_i) \leqq \varrho \quad \textit{ist für beliebiges } m \textit{ und } k,\ m \geqq k \geqq n.$$

Denn sei in (3.1) $l = k + r$, $r > 0$. Dann ist $d(z_k, z_{k+r}) \leqq d(z_k, z_{k+1}) + d(z_{k+1}, z_{k+r})$ infolge $D3$. Wegen $H3$ erhält man unter Berücksichtigung von (3.2)

$$d(z_k, z_{k+r}) \leqq \sum_{i=k}^{k+r-1} d(z_i, z_{i+1}) \leqq \varrho.$$

4. Majorantenmethode. Fehlerabschätzung

Wir nehmen nun an, daß jedes Element von H regulär sei. Dann besitzt H eine Symmetrisierung $\overline{H} = \{\varrho, \sigma, \tau, \ldots; -\varrho, -\sigma, -\tau, \ldots\}$. $\overline{H}$ ist eine Gruppe. Mittels der Ordnung auf H wird in natürlicher Weise eine Ordnung

[1]) H braucht nicht vollständig geordnet zu sein.

auf $\overline{H}$ erhalten, indem wir dann und nur dann $-\sigma \leqq -\varrho$ setzen, wenn $\varrho \leqq \sigma$, $\varrho \in H$, $\sigma \in H$ ist und Transitivität verlangen. Ferner gelte

$\overline{H}3$: Für beliebige Elemente ϱ, σ, τ aus $\overline{H}$ folge aus $\varrho \leqq \sigma$, daß $\varrho + \tau \leqq \sigma + \tau$ ist.

Daraus folgt: Ist $\sigma + \tau = \varrho$, $o \leqq \sigma$, dann ist $\tau \leqq \varrho$. Ist $\sigma = 2\sigma$, dann ist $\sigma = o$. Ist $\mu \leqq \sigma$, $\varrho \leqq \tau$, dann ist $\mu + \varrho \leqq \sigma + \tau$.

Auf $\overline{H}$ sei ein äußeres Kompositionsgesetz $(M, \varrho) \to M\varrho$, $M\varrho \in \overline{H}$, mit dem Operatorenbereich $\Omega = \{M, N, \ldots\}$ erklärt. Innere Kompositionsgesetze auf Ω seien durch $(M+N)\varrho = M\varrho + N\varrho$, $(MN)\varrho = M(N\varrho)$ gegeben für beliebiges $M \in \Omega$, $N \in \Omega$, und $\varrho \in \overline{H}$. Für die Operatoren aus Ω gelte ferner für beliebiges $M \in \Omega$, $\sigma \in \overline{H}$, $\varrho \in \overline{H}$

Ω_1: falls $o \leqq \varrho$, dann sei $o \leqq M\varrho$,

Ω_2: falls $\sigma \leqq \varrho$, dann sei $M\sigma \leqq M\varrho$.

Sind die Operatoren aus Ω additiv, so ist $Mo = o$ und $\Omega 1$ folgt aus $\Omega 2$. Ferner ist dann $M(-\varrho) = -M\varrho$.

Sei f eine Abbildung von E in E und $E' \subseteqq E$. Für ein $n \in N$ existiere ein $M \in \Omega$, so daß für beliebiges $x \in E'$ und für beliebiges $y \in E'$ $d(f^n(x), f^n(y)) \leqq M\,d(x, y)$ ist. Dann sagen wir, „f^n ist auf E' M-beschränkt". Für $z \in E$ setzen wir ferner $z_i = f^i(z)$, $i \in N$. Es gelten dann folgende hinreichende Kriterien für die Gültigkeit von (3.1):

1. Für ein $z \in E$ und jedes $n \in N$ sei f^n auf $\{z, z_1, z_2, z_3, \ldots\}$ M_n-beschränkt. Existiert für beliebiges festes $\varrho' \in H'$ ein $n \in N$, so daß $M_n\,d(z, z_r) \leqq \varrho'$ ist für beliebiges $r > 0$, so gilt (3.1).

BEWEIS. Zu beliebigem $\varrho \in H'$ existiert $\varrho' \in H'$, so daß $2\varrho' \leqq \varrho$ ist. Ferner gilt $d(z_n, z_{n+r}) \leqq M_n\,d(z, z_r) \leqq \varrho'$. Für $k \geqq n$ und $l \geqq n$ ist dann $d(z_k, z_l) \leqq d(z_k, z_n) + d(z_n, z_l) \leqq 2\varrho' \leqq \varrho$.

2. Sei f auf den Mengen $\{z_{i+1}, z_i\}$, $i \in N$, M-beschränkt. Für beliebiges $\varrho \in H'$ existiere ein $n \in N$, so daß für jedes $r \geqq 0$ $\sum_{j=0}^{r} M^j d(z_{n+1}, z_n) \leqq \varrho$ ist, wobei M^0 den Identitätsoperator bedeute. Dann gilt (3.2) und damit (3.1).

BEWEIS. $\sum_{i=k}^{m} d(z_{i+1}, z_i) \leqq \sum_{i=n}^{m} d(z_{i+1}, z_i) \leqq \sum_{j=0}^{m-n} M^j d(z_{n+1}, z_n) \leqq \varrho$.

Ferner gelten folgende Fehlerabschätzungen:

1. Sei $x = f(x)$, $z \in E$ und f^n auf $\{x, z\}$ M_n-beschränkt für jedes $n \in N$. Dann ist $d(x, z_n) \leqq M_n\,d(x, z)$ eine Abschätzung des Abstandes der n-ten Iterierten $f^n(z)$ vom Punkte x. Abschätzungen dieser Art dienen in der Praxis zur Kennzeichnung des Konvergenzverhaltens (z. B. lineare Konvergenz, quadratische Konvergenz).

2. Sei $k \in N$ eine feste Zahl, $m > n > k$, f^l auf $\{z_{k+1}, z_k\}$ M_l-beschränkt für jedes $l \geqq n-k$ und x Limes der Filterbasis $\left\{\bigcup_{\substack{i \in N \\ i \geqq n}} f^i(z)\right\}_{n \in N}$. Dann ist $d(x, z_n) \leqq d(x, z_m) + \sum_{l=n-k}^{m-k-1} M_l\,d(z_{k+1}, z_k)$.

BEWEIS.
$d(x, z_n) \leqq d(x, z_m) + d(z_m, z_n)$ und $d(z_m, z_n) \leqq \sum_{i=n}^{m-1} d(z_{i+1}, z_i) \leqq \sum_{l=n-k}^{m-k-1} M_l d(z_{k+1}, z_k)$.

Abschätzungen dieser Art werden in der Praxis häufig benützt, falls z.B. H das Intervall $[0, \infty)$, E ein metrischer Raum, Ω eine Menge von nichtnegativen reellen Zahlen ist, $\lim_{m\to\infty} d(x, z_m) = 0$ ist und die Reihe $\sum_{l=n-k}^{\infty} M_l$ konvergiert.

Auf der Majorantenmethode beruht

SATZ 4. *Sei f eine Abbildung von E in E und f^l auf E M_l-beschränkt für jedes $l \in N$. Es existiere ein Operator $M \in \Omega$ und zu beliebig gewählten $\varrho \in H'$, $y \in E$, $z \in E$ ein $s \in N$, so daß für jedes $m \geqq s$ $o \leqq M d(y, z) - \sum_{l=1}^{m} M_l d(y, z) \leqq \varrho$ ist. Dann ist $\{\bigcup_{l \geqq j} f^l(z)\}_{j\in N}$ Basis eines Cauchy-Filters und*

$$\{f^{s+1}(y), f^{s+1}(z)\} \times \{f^{s+1}(y), f^{s+1}(z)\} \subseteqq B_{2\varrho}.$$

BEWEIS. $\{\bigcup_{l\geqq j} f^l(z)\}_{j\in N}$ ist genau dann Basis eines Cauchy-Filters, wenn (3.1) gilt. Sei ϱ^* ein beliebiges Element aus H', $2\varrho \leqq \varrho^*$, $2\varrho' \leqq \varrho$ nach $H2$, und $r \in N$. Wir nehmen das zu ϱ', z_{r+1}, z_r gehörige $s \in N$. Es ist $d(z_{j+1}, z_j) \leqq M_{j-r} d(z_{r+1}, z_r)$ für $j > r$. Aus $D3$ folgt $d(z_{s+r+k+1}, z_{s+r+1}) \leqq \sum_{j=s+r+1}^{s+r+k} d(z_{j+1}, z_j)$ $\leqq \sum_{j=s+1}^{s+k} M_j d(z_{r+1}, z_r)$ für beliebiges $k > 0$. Ferner gilt $M d(z_{r+1}, z_r) - \sum_{j=1}^{s} M_j d(z_{r+1}, z_r)$ $\leqq \varrho'$ und $-M d(z_{r+1}, z_r) + \sum_{j=1}^{s+k} M_j d(z_{r+1}, z_r) \leqq \varrho'$, also nach $\overline{H}3$ $\sum_{j=s+1}^{s+k} M_j d(z_{r+1}, z_r)$ $\leqq 2\varrho'$. Daraus folgt $d(z_{s+r+k+1}, z_{s+r+1}) \leqq 2\varrho' \leqq \varrho$. Ebenso gilt dann für beliebiges $l > 0$ $d(z_{s+r+1}, z_{s+r+l+1}) \leqq 2\varrho' \leqq \varrho$. Damit folgt aus $D3$ $d(z_{s+r+k+1}, z_{s+r+l+1})$ $\leqq 2\varrho \leqq \varrho^*$. Somit gilt (3.1) mit $n = s + r + 2$. — Schließlich ist $M_{s+1} d(y, z) \leqq 2\varrho$, also $d(f^{s+1}(y), f^{s+1}(z)) \leqq M_{s+1} d(y, z) \leqq 2\varrho$.

Ist H das Intervall $[0, \infty)$, E ein vollständiger, metrischer Raum, Ω eine Menge von nichtnegativen reellen Zahlen, so ergibt Satz 4 mit den Sätzen 1 und 2 einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Fixpunkte, der anscheinend erstmals von J. WEISSINGER [2] formuliert wurde. Die in Satz 1 geforderte Stetigkeit folgt dabei aus der Dehnungsbeschränktheit.

Literatur

[1] KANTOROVITCH, L.: The method of successive approximation for functional equations. Acta Mathematica Uppsala **71**, 63—97 (1939).

[2] WEISSINGER, J.: Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens. Math. Nachr. **8**, 193—212 (1952).

[3] SCHRÖDER, J.: Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff. Math. Z. **66**, 111—116 (1956).

[4] BOURBAKI, N.: Topologie générale. Deuxième edition. Paris 1951.

München, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

Ann Arbor, University of Michigan, Dept. of Mathematics

(Eingegangen am 5. März 1960)