Teorías y métodos para la investigación de la racionalidad de la práctica en la enseñanza de las matemáticas

PATRICIO HERBST[1]

University of Michigan, Ann Arbor, Estados Unidos de Norteamérica

¿Cómo se pueden explicar las decisiones que toman los maestros que conciernen la transacción de conocimientos durante la enseñanza? Por ejemplo ¿cómo podemos explicar la variación en enunciados de problemas que requieren una demostración en clases de geometría? Voy considerar esa pregunta como un ejemplo para anclar los conceptos más generales que propongo. Es importante aclarar que hay una tensión entre la afirmación de que nuestro[2] enfoque intenta considerar la especificidad de las transacciones de conocimientos y el hecho de que los constructos que proponemos son relativamente generales. Las aplicaciones a temas particulares como la presentación de ejercicios de demostración en geometría no es solamente un ejemplo, sino la manera canónica en que se activan los conceptos en nuestra práctica de investigación. Al leer este artículo hay que pensar en que estoy hablando de la gestión de las situaciones de demostración en la clase de geometría. Cuando hablo de la racionalidad de la práctica, cuando propongo que para entender la práctica hace falta descubrir como se negocian las normas de la práctica, esas afirmaciones son metateóricas—sirven para guiar la investigación de teorías locales sobre prácticas específicas, específicas en particular en relación a las transacciones de conocimientos más o menos específicos. Los conceptos son, sin embargo, suficientemente generales para guiar la investigación sobre la enseñanza de otros dominios matemáticos.

El estudio de la racionalidad de la práctica

Lo que proponemos al desarrollar elementos para el estudio de la racionalidad de la práctica rechaza la tradición prescriptiva con la que la comunidad de investigadores en educación se ha relacionado tradicionalmente con el trabajo del maestro. Hace muchos años, cuando empecé mi trabajo en investigación en educación matemática, escuché de mi colega Dilma Fregona una reflexión que marcó mi carrera (por cierto, Dilma con quien trabajé en la Universidad de Córdoba, en Argentina, es egresada del CINVESTAV). Dilma dijo que la enseñanza ha sido el objeto de toda suerte de voluntarismos. Eso es patente en Estados Unidos, en particular, donde tradicionalmente el trabajo del maestro se ha tratado como una

---

[1] Texto revisado de la conferencia plenaria dictada en ocasión del Tercer Coloquio de Doctorado en Matemática Educativa en el CINVESTAV, IPN, Ciudad de Méjico. El autor agradece a Margarita Curiel por su apoyo con la transcripción de la grabación y a Vilma Mesa por comentarios sobre una versión anterior. El trabajo presentado ha contado con el apoyo de la United States National Science Foundation (NSF) mediante subsidios a la investigación REC-0133619, ESI-0353285, y DRL- 0918425. Todas las opiniones en este escrito son las del autor y no representan la posición de la National Science Foundation.

[2] Cuando hablo en plural me refiero a la colaboración con mi colega Daniel Chazan (University of Maryland), con quien hemos estado trabajando sobre la racionalidad de la práctica por más de diez años.

variable que se puede manipular a voluntad, como si bastara que el maestro tuviera la voluntad de hacer algo en la clase para que tal o cual cosa sea posible de hacer. Este voluntarismo se ha perfeccionado con la adición de conceptos tales como creencias, conocimientos, y competencias de los maestros para establecer la noción de que a los maestros hay que educarlos para que sepan hacer lo que deben de hacer, persuadirlos para que hagan lo que deben de hacer, mientras que esto último, lo que los maestros deben de hacer, lo deciden quienes escriben las políticas educativas, los estándares, las visiones, algunas veces informados por resultados de investigación en los aprendizajes, muchas veces informados por proyectos sociales y políticos. A esto me refiero al hablar de la tradición prescriptiva. Si bien no nos queda otro recurso que aceptar que los organismos gubernamentales piensen a la enseñanza como pasible de prescripciones, como investigadores tenemos que tomar una actitud un poco más empírica y reflexiva y estudiar las condiciones de posibilidad de tales cambios.

Nuestro rechazo de la tradición prescriptiva se basa en la observación de que la instrucción en general, y el trabajo del maestro en particular, ocurren en un contexto que no solo los influencia sino tambien los restringe. Cuando digo instrucción me refiero a las interacciones entre el estudiante, el contenido, y el maestro; a la colección de relaciones mutuas que permiten la transacción de conocimientos. La instrucción, como nos recuerdan tanto Chevallard (1985) como Cohen, Raudenbush, y Ball (2003), ocurre en el contexto de espacios institucionales que tanto la hacen posible como pasible a la influencia de otros agentes. En la medida que esas influencias son sociales y tecnológicas me refiero a ellas como influencias sociotécnicas. Esas influencias sociotécnicas también afectan lo que el maestro puede hacer. Al rechazar la tradición prescriptiva lo que sugerimos es que necesitamos entender la enseñanza en vez de legislarla. Creemos que mejorar la enseñanza requiere no solamente ejercitar la imaginación y estimular la voluntad, sino tambien estudiar la práctica y las condiciones de posibilidad que pueden facilitar su transformación incremental.

Decisiones en la transacción de conocimientos

Desde el punto de vista de la necesidad de entender la práctica podemos ahora volver a la pregunta: ¿Cómo se pueden describir y explicar las decisiones que toman los maestros en las clases y que conciernen la transacción de conocimientos? La pregunta no nos invita a decidir qué es lo que creemos que el maestro debería de hacer, sino que nos invita a estudiar cuán probable es que lo haga. Más aún, la pregunta nos invita a desarrollar elementos teóricos y metodológicos para estudiar la variabilidad de las acciones posibles del maestro en clase.

Un ejemplo (Figura 1) servirá para anclar el problema; la imagen es parte de un instrumento que describo más adelante. El maestro presenta el problema en el que quiere que sus estudiantes trabajen.

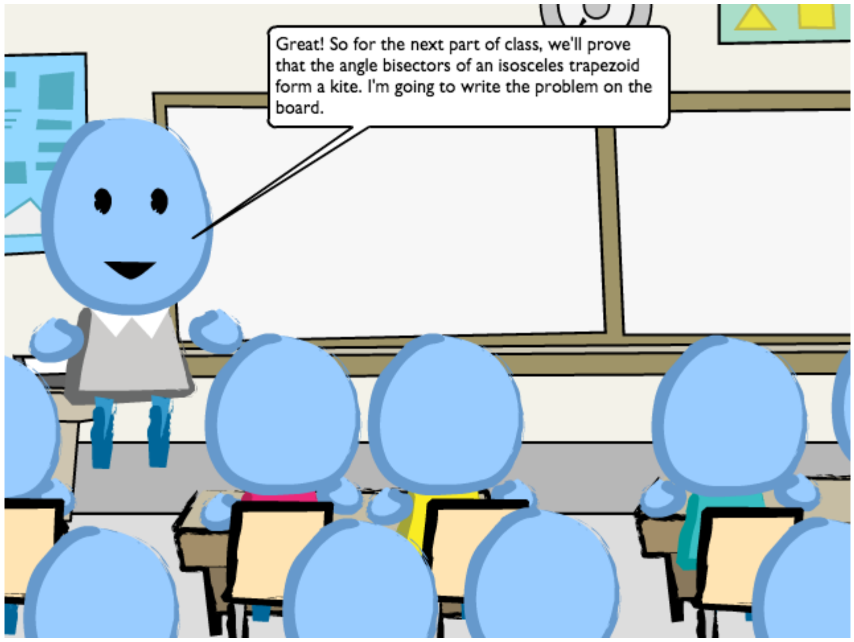


Figura 1. El maestro dice "Muy bien; ahora vamos a probar que las bisectrices de los ángulos de un trapecio isósceles forman un romboide.
Voy a escribir el problema en el tablero."[3]

Ante lo presentado en en la Figura 1, ¿qué esperaría que el maestro escriba en el tablero? En la Figura 2 se muestran dos posibilidades. En la Figura 2a, el maestro dice "Copien el diagrama que está en el tablero y trabajen con sus vecinos en el problema", y el enunciado en el tablero dice "¿Por qué podríamos decir que los puntos de intersección de las bisectrices de un trapecio isósceles forman un romboide?" En la Figura 2b el maestro dice algo similar, "Copien el diagrama del tablero y trabajen con sus vecinos para enunciar los datos dados y hacer la prueba." En el tablero está el enunciado que tienen que probar, el cual dice: "Demuestre que los puntos de intersección de las bisectrices de un trapecio isósceles forman un romboide."

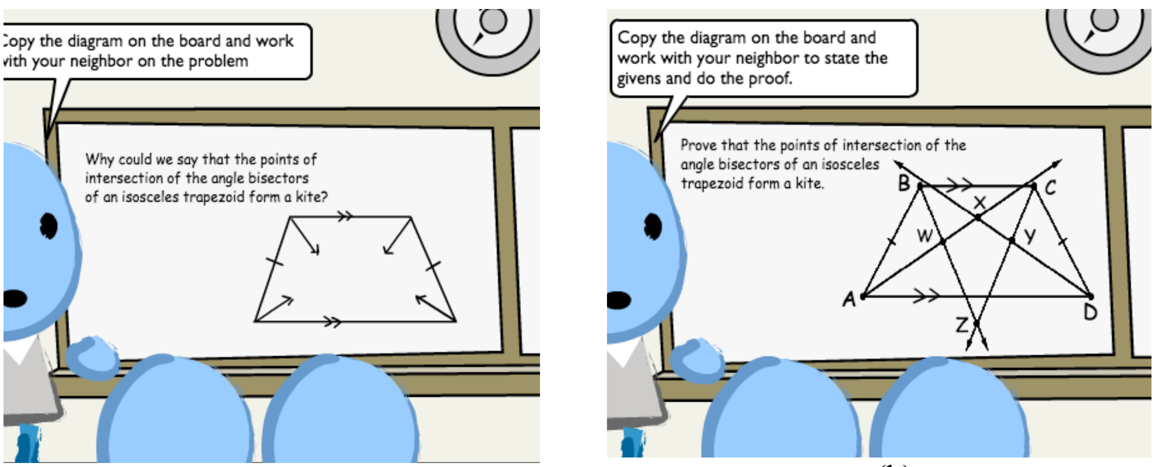
¿Cuál decisión le parece más probable, la de la Figura 2a o la de la Figura 2b? Y ¿por qué? ¿O tal vez ninguna de las dos? ¿Qué está envuelto en responder a esta pregunta?

Investigación de la instrucción matemática: La racionalidad de la práctica

Las perspectivas usuales en investigación en educación, aún en la investigación en la educación matemática, tratan de reducir la cuestión de la toma de decisiones tanto en términos de cuál es la decisión a tomar como en términos de cómo explicarla. En términos de cuál decisión tomar, la tarea se suele reducir a decidir sobre la ejecución de un estilo general de enseñanza: por ejemplo decidir entre enseñar por describrimiento o por

[3] Todas las imágenes usadas en las figuras son propiedad intellectual © The Regents of the University of Michigan y han sido usadas con permiso. Su reproducción está prohibida.

instrucción directa. En términos de las causas de la decisión, las explicaciones usuales reducen aquélla a características totalizantes del individuo como las creencias del maestro: Por ejemplo ¿cree el maestro que los estudiantes pueden hacer problemas difíciles o que los estudiantes necesitan ser guiados paso a paso? Estas perspectivas, si bien razonables, no ponen atención a las matemáticas que están en juego en la toma de decisiones. Cabe hacerse las preguntas, ¿hay aspectos de las concepciones en juego que se relacionan con lo que el maestro pueda hacer en la clase?¿cómo podemos darle atención a las demandas de conocimientos específicas de la situación en la que se toma la decisión? Mas aún, ¿hay expectativas depositadas en la acción del maestro que sirvan de trasfondo a la decisión que pueda tomar en éste momento en particular? Y ¿qué recursos profesionales tiene disponibles el maestro, dada su posición institucional, que le permitan o le ayuden a justificar una u otra acción?



(a) (b)

Figura 2. Dos posibilidades de presentar el problema anunciado en la Figura 1

Nuestra perspectiva, que en inglés llamamos "*practical rationality"* y que traducimos al castellano como "racionalidad de la práctica", desarrolla elementos teóricos y metodológicos para estudiar las decisiones del maestro e incluyen tres tipos de consideraciones. La primera consideración es la atención al conocimiento personal y otras características individuales del maestro. Las otras dos coinsideraciones apuntan a dos tipos de recursos socio-técnicos disponibles al maestro—y al decir socio-técnicos describo aquéllos no solamente como sociales sino también como específicos del conocimiento. Primeramente, las demandas sociotécnicas de la situación de instrucción; en segundo lugar, los recursos sociotécnicos disponibles dada la posición institucional del maestro de matemáticas para justificar decisiones. Mi trabajo está situado en los grados 8vo a 12vo (con estudiantes entre 12 y 18 años) con maestros que por lo general enseñan matemáticas únicamente.

Para identificar los recursos individuales del maestro contamos con contribuciones de otros investigadores. Basados en la teoría del conocimiento matemático de los maestros (MKT) desarrollada por Ball, Thames, y Phelps (2008), mi grupo ha desarrollado un test que mide el conocimiento de geometría de los maestros (Herbst & Kosko, 2014a).

Nuestra contribución teórica y metodológica, sin embargo, se centra en constructos y medidas de los recursos sociotécnicos disponibles para el maestro. La perspectiva que tomamos sobre la racionalidad de la práctica acentúa no necesariamente en dónde están esos recursos sociotécnicos, sino que describe cuales son los conocimientos de la enseñanza mobilizados por las situaciones del trabajo profesional. En particular, este conocimiento puede ser tácito en lugar de explícito.

Una pregunta que puede surgir al considerar esta tarea es ¿para qué sirve todo esto? La investigación del conocimiento de los enseñantes sirve, por ejemplo, para planificar la formación de docentes. Pero ¿para qué sirve entender el sistema de instrucción en donde se desempeñan los enseñantes?, ¿para qué puede servir entender los recursos y las restricciones en la toma de decisiones? Viniendo de Estados Unidos donde cada tanto hay una reforma que pretende legislar la enseñanza, me interesa contribuir a contestar la pregunta de si, dada una reforma, podemos anticipar su éxito, o más constructivamente si podemos identificar que es lo que hace falta aprender sistémicamente para que la reforma tenga éxito (véase Bryk et al., 2015). ¿Qué conceptos nos permiten anticipar los problemas que va a tener la introducción de una reforma y cómo podemos estudiar la implementación de reformas? Las reformas tienden a partir de lo general e ir a lo particular, empezando con grandes ideas como *descubrimiento* o *equidad*, pero con poca claridad sobre los cambios en lo particular—¿como podemos pensar en esos cambios en particular?

Ante la pregunta de si es posible mejorar la enseñanza, el enfoque de la racionalidad de la práctica provee elementos de diseño e interpretación que permiten pensar el mejoramiento de la enseñanza partiendo de lo particular para ir a lo general. Los recursos socio-técnicos de diseño de las situaciones de instrucción y de las estructuras institucionales en las que se desempeñan los maestros puedan dar un punto de apoyo para cambios incrementales en la instrucción.

Un ejemplo de recursos institucionales es el currículum designado a traves de los libros de texto. El curriculum usalmente se ve como un punto de apoyo para las reformas. Pero, ¿hay otras estructuras institucionales, o micro-estructuras en la clase, que puedan servir para la implementación de reformas o más generalmente para mejorar la enseñanza?

Nuestro enfoque en la racionalidad de la práctica nos permite desarrollar herramientas teóricas y metodológicas para describir, explicar y predecir el trabajo del maestro en matemáticas atendiendo la especificidad de su trabajo, la especificidad matemática, situacional, e institucional.

Es un proyecto que busca, además, hacer investigación básica en educación matemática, lo que quiere decir buscar entender una realidad social que existe independientemente de nuestra voluntad. Más aún, buscamos hacer investigación básica en educación matemática tratando de acercarnos a los estándares de investigación en las ciencias sociales. En particular avanzando hacia el uso de diseños más rigurosos de investigación y el uso de medición, eventualmente buscando producir explicaciones causales mediante el uso de diseños experimentales. Haré algunas conexiones metodológicas al describir la teoría y los ejemplos.

Describiendo la especificidad epistemológica de la práctica

Entrando a lo particular, el primer problema que tratamos de describir y explicar es ¿qué está haciendo el maestro cuando él o ella gestiona la instrucción? Disciplinas como las matemáticas, la pedagogía general, o las ciencias del aprendizaje sugieren describir la práctica como una aplicación de ideas más generales: Estas disciplinas dirían que lo que ocurre es el tratamiento de un tópico matemático o la aplicación de alguna pedagogía. El ejemplo dado en las Figuras 1 y 2 podría describirse desde el punto de vista de las matemáticas diciendo que la clase está por probar un teorema de geometría o que la clase usará la definición de bisectriz para deducir las propiedades de una figura. Desde el punto de vista de la pedagogía general se podría decir que los alumnos han recibido un problema de nivel de análisis en la taxonomía de Bloom o que el maestro está organizando a los estudiantes para un trabajo cooperativo. Esos son ejemplos de cómo la práctica de la enseñanza matemática suele describirse como una aplicación de teorías generadas fuera de la clase de matemáticas, sea desde las matemáticas mismas, desde la psicología del aprendizaje, o desde la pedagogía general. Nuestro enfoque en la racionalidad de la práctica, por el contrario, desarrolla una teoría de la práctica, buscando describir lo que está en juego para el maestro. ¿Cuál es el problema que el maestro esta resolviendo al actuar en la clase? Para el maestro, el problema de gestión de la enseñananza es más local y más complejo que lo que plantean las perspectivas disciplinares mencionadas.

El problema es local en el sentido de que las decisiones que toma el maestro, por ejemplo la decisión de cómo enunciar el problema planteado en Figuras 1 y 2 es una decisión específica para una clase particular y para conocimientos particulares que el maestro debe de gestionar con los alumnos. La decisión no se reduce a una cuestión de cuál estilo general de enseñanza se está por aplicar (por ejemplo, enseñar por descubrimiento o hacer que los estudiantes trabajen en grupo).

El problema es más complejo porque las decisiones que toma el maestro requieren una atención a más de una sola cosa, se trata no de una cosa o de la otra, no de trabajar en grupo o de probar teoremas exclusivamente sino de probar un teorema y trabajar en grupo simultáneamente. Esta complejidad sugiere que reducir la investigación en la enseñanza a las matemáticas, la pedagogía general, o incluso a las teorías del aprendizaje, implica una desnaturalizacion insostenible del fenómeno.

En vez de esto, proponemos describir lo que está en juego para el maestro en términos de la gestión de intercambios entre dos manifestaciones del conocimiento en la práctica de la enseñanza de las matemáticas. Por un lado hay elementos de conocimiento que los estudiantes tienen que aprender y el maestro debe de enseñar, conocimientos y habilidades que están listados en el currículum. Por otro lado están las acciones de los estudiantes y sus maestros en tareas particulares, que le dan al maestro evidencia de que los estudiantes tienen una relación con ese conocimiento. Esas dos maneras de dar cuenta de los conocimientos en juego se manifiestan localmente en la clase y pueden ser usadas para registrar lo que está ocurriendo; pero es posible que, para el caso particular de una lección, ambas formas del conocimiento matemático sean o no sean compatibles. ¿Bajo qué condiciones se puede decir que un concepto que el maestro debe de enseñar a los alumnos es lo que los alumnos están utilizando cuando se ocupan de la tarea que el maestro les ha dado a hacer? ¿Cómo se puede segmentar el trabajo de la clase de tal suerte que este trabajo consistente en las acciones de alumnos y maestro en una tarea particulares sea pueda describir en términos de objetos curriculares. Para describir este tipo de preguntas hemos propuesto la noción de transacción instruccional (*instructional exchange*; Herbst & Chazan, 2012).

Dado un elemento del conocimiento a ser aprendido, el maestro tiene que crear condiciones para que los estudiantes demuestren que tienen una relación con ese conocimiento, por ejemplo el maestro tiene que proponer problemas que al resolverse le den al alumno oportunidad de usar el conocimiento en cuestión. Cuando los estudiantes trabajan en tal problema, el maestro tiene que leer sus acciones con relación al conocimiento en juego. A eso es lo que llamo un intercambio o una transacción. Es una transacción entre dos maneras de leer el conocimiento matemático: Como inscripto en la acción y como representado por la acción. Como probablemente sospecharán, esta idea tiene una filiación con la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1997); la mía es probablemente una lectura desautorizada de su trabajo.

Según entiendo, Brousseau examina este tipo de intercambios desde el punto de vista del trabajo matemático del estudiante: ¿cuáles tareas pueden poner a los conocimientos matemáticos en juego y cuándo puede un observador decir que las acciones de los estudiantes representan significativamente los conocimientos matemáticos en juego? Nuestro enfoque intenta resolver el mismo problema desde el punto de vista del maestro. El maestro, desde luego, podría verse como un observador. Sin embargo el maestro es un observador cuya posición institucional lo sesga de manera particular—el maestro no solamente puede estudiar la posibilidad de tal intercambio, sino que al ser responsable por el éxito de la enseñanza, el maestro necesita que tal intercambio sea posible. Dicho sea de paso, notamos que esta responsabilidad es el producto de una evolución histórica y probablemente tambien una variable cultural: En Estados Unidos y después del 2001, se ha hecho a los maestros responsables de generar evidencia del éxito de los aprendizajes. Asumiendo que el maestro debe observar la tarea del estudiante para hacer tal intercambio, nosotros nos planteamos la siguiente pregunta: ¿cuáles recursos y qué restricciones están disponibles para el maestro para gestionar esos intercambios?

La decisión de cómo presentar un problema de demostración

Entonces volvamos al ejemplo dado en las Figuras 1 y 2, ¿qué es lo que está en juego para el maestro? Lo que está en juego para el maestro no es solamente el objeto matemático, la proposición de que las bisectrices de un trapecio isósceles forman un romboide. Esa proposición puede estar en juego para el alumno en una variedad de tareas, pero el trabajo del estudiante también implica una manera particular de conocer la proposición en juego.

En este caso, esta manera de conocer la proposición en juego está anticipada o tal vez sugerida mediante lo que el maestro dice: ¿por qué podríamos decir que las bisectrices de los ángulos de un trapecio isósceles forman un romboide?, o cuando el maestro les pide a los estudiantes que prueben que las bisectrices forman un romboide. En el primer caso, los alumnos podrían pensar en una variedad de justificaciones, mientras que en el segundo caso, la pregunta les requiere proponer una prueba ¿Cuál es la diferencia?

En el segundo caso, poder dar una prueba de la verdad de la proposición, puede darle evidencia al maestro de que el alumno ha adquirido uno de los objetos explícitos de enseñanza en la clase de geometría en los Estados Unidos: la habilidad de hacer pruebas. Si usamos la noción de intercambio instruccional para analizar lo que está pasando en las Figuras 1 y 2 desde el punto de vista del maestro, lo que está en juego es la posibilidad de efectuar una transacción entre dos cosas: por una parte la afirmación de que los estudiantes saben demostrar y por otra parte las acciones específicas que los estudiantes tomen frente a la tarea que involucra las bisectrices de un trapecio isósceles.

Si el maestro puede lograr que los estudiantes hagan esa demostración, esa evidencia le sirve para decir que los estudiantes saben hacer pruebas. El maestro puede no necesariamente estar interesado en afirmar que los estudiantes conocen la propiedad, pues tal propiedad tiene muy poco valor desde el punto de vista curricular.

Así pues desde ése punto de vista tal vez se pueda entender un poco mejor por qué la posibilidad dada en la Figura 2a es más probable que la posibilidad dada en la Figura 2b. Mientras que en la posibilidad de la Figura 2b los estudiantes podrían elegir tanto hacer una prueba como proveer una explicación que no fuera una prueba, la posibilidad de la Figura 2a requiere una prueba. Ésta posibilidad reduce un poco la incertidumbre del maestro de si tendrá evidencia que le permita interpretar el trabajo de los estudiantes.

La misma proposición podría aparecer en otro tipo de intercambios donde los estudiantes no necesitarían probarla. Por ejemplo en una situación de exploración, el maestro podría decir, "voy a pasar una hoja con un trapecio isósceles. Exploren qué tipo de figura se forma cuando uno traza las bisectrices de los ángulos." El alumno se encontraría con la misma proposición pero de una manera diferente y por consiguiente el tipo de afirmación que el maestro podría hacer, usando las acciones del alumno, sería distinta. En el caso de la exploración es improbable que el maestro pueda decir que "los estudiantes saben demostrar." La Figura 3 muestra otra opción, en la que el maestro les pide a los estudiantes que descubran las medidas de los otros ángulos en el diagrama. La Figura 3 representa otra manera de conocer la proposición de que las bisectrices de un trapecio isósceles forman un romboide, en el contexto de una situación de cálculo (*geometric calculation in number*, Hsu & Silver, 2014). El estudiante puede usar las propiedades que conoce sobre ángulos y sobre cuadriláteros, haciendo algunas deducciones para descubrir las medidas de los ángulos.

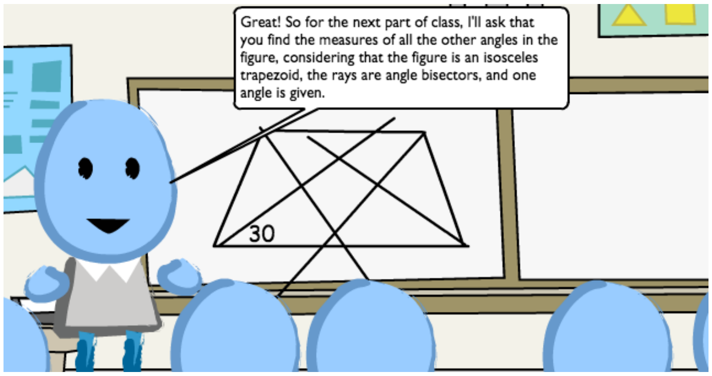


Figura 3. Una tarea de cálculo geométrico

Pensando en términos de intercambios entre el trabajo matemático de los estudiantes y las afirmaciones que el maestro puede hacer en relación al curriculum, es claro que en cada uno de estos casos la misma proposición está involucrada en el intercambio, pero está involucrada de maneras diferentes, pues el trabajo que el alumno va a hacer es probablemente diferente. Por consiguiente, cada una de esas tareas le permite al maestro hacer un intercambio distinto. No estamos hablando de pedagogías alternativas, ni de una elección entre estilos de enseñanza con las cuales se pueda cumplir el mismo objetivo curricular, sino de distintas unidades de conocimiento que son posibles en distintas formas de trabajo, distintos ítems del currículum implementado (Kilpatrick, 1990).

Una teoría de la práctica necesita conceptos que permitan la descripción de éstos intercambios de instrucción en una clase. En la siguiente sección exploro algunos de esos conceptos: contextualización, contrato, y situación.

Contextualización (framing) de los intercambios de conocimientos: El contrato

Un concepto fundamental en el estudio de la racionalidad de la práctica es la noción de *framing*, que podría traducirse al castellano como *enmarcado* (o *contextualización),* y que proviene de la sociología de Erving Goffman. Goffman (1974) observó que las maneras como enmarcamos o contextualizamos lo que decimos o hacemos, le otorgan sentido; el mismo discurso o las mismas acciones tienen distinto sentido en distintas situaciones. Por ejemplo, la pregunta "¿qué hora es?" tiene un valor transaccional (obtener información acerca de la hora del día) cuando hecha en la calle a un extraño y otro valor transaccional cuando hecha en una reunión familiar a un sobrino de seis años (darle al niño la oportunidad de mostrar que él tambien tiene un reloj o que sabe leer la hora). Nosotros usamos la nocion de contextualización para describir el trabajo matemático en la clase.

El caso más común de contextualización en el estudio de la enseñanza es el contrato didáctico, que tomamos, de la teoría de Brousseau (1997), en un sentido amplio. Cualquier persona puede hacerle una pregunta a alguien; por ejemplo: ¿qué figura se forma cuando se trazan las bisectrices de los ángulos de un trapecio isósceles? Si tal pregunta se hiciera en el marco de una fiesta donde se está jugando a preguntas y respuestas, es muy probable que la pregunta se juzgue cómica y la respuesta para muchos en la audiencia dé lugar a una multitud de respuestas: "¿Y eso a quien le importa?", "¡No tengo ni la menor idea!", "¿Una figura geométrica?", "¡Una figura horrible!", "¡Otra figura!). Pero si la pregunta está enmarcada dentro del contrato didáctico de la clase, y si la pregunta la hace el maestro, ésta toma el sentido de una tarea a realizar—es posible que los alumnos no sepan la respuesta inmediatamente, pero también es razonable que en tal caso se tomen algún tiempo para descubrirla, recordarla, o elegir entre agunas opciones, que confiesen no saber. El contrato didáctico establece normas muy generales que permiten que estos intercambios ocurran: Por ejemplo, el contrato establece que el maestro tiene derecho a (1) asignarle trabajo a los alumnos, (2) ver qué es lo que los alumnos hacen cuando trabajan en la tarea asignada, y (3) emitir un juicio sobre lo que los alumnos hacen. La existencia del contrato didáctico caracteriza a la instrucción: el contrato hace posibles las relaciones entre el maestro, los alumnos, y el conocimiento a enseñar.

Pero el contrato garantiza las relaciones entre el maestro, los alumnos, y el conocimiento de una manera muy general. En términos de tareas particulares, Brousseau observó que una de las responsabilidades fundamentales del maestro es negociar un contrato didáctico local alrededor de cada una de las tareas (o situaciones adidácticas) en las cuales los alumnos van a construir una relación particular con el conocimiento. Una situacion adidáctica pone al alumno en relación con un *milieu* adidáctico, en el contexto de cuyas interacciones el alumno desarrollará sus conocimientos: Esta relación necesitará un contrato didáctico local que le sirva de marco. Tal contrato identificará a cada momento qué se espera del maestro y del alumno, y cómo los elementos del *milieu* deben leerse para que den información útil en la formación del concocimiento. Este contrato no es necesariamente estable, el maestro tiene que negociarlo continuamente de tal suerte que se pueda mantener activa a la tarea. Es aquí donde mi trabajo comenzó. Me interesaba estudiar las dificultades que tenía que superar el maestro al negociar el contrato didáctico para una tarea.

Tensiones en la gestión del contrato

Considero brevemente el estudio de una tarea que llamé "ranking triangles" o "ordenamiento de triángulos" (Herbst, 2003). En aquel estudio la tarea dada a los estudiantes consistía en ordenar ocho (8) triángulos de cartulina de acuerdo con su área, pero sin usar la fórmula de area o usándo la fórmula lo menos posible. Inicialmente los estudiantes comparaban áreas por inclusión o aditividad. Pero dos triángulos en particular habían sido creados de tal suerte que ninguno de ellos estaba contenido en el otro. En lugar de eso, un par de lados estaban en una razón de 2 a 1, mientras que las alturas correspondientes a aquellos lados estaban en una razón de 1 a 2. Tal información no les se le dio directamente a los estudiantes. En el curso de trabajar en la tarea, una estudiante descubrió tales razones y afirmó que los triángulos eran iguales, invocando que al usar la fórmula del area, los factores se cancelarían, y ambas áreas darían el mismo valor. Su compañera, sin embargo insistía que tal razonamiento no era válido pues requería usar la fórmula. Lo que estaba en juego era una nueva relación con la fórmula del área de un triángulo—no como una manera de producir el valor numérico del area sino como manera de expresar o representar el área de un triángulo particular.

En mi análisis del trabajo del maestro usando esa tarea con los alumnos propuse que la negociación del contrato didáctico para tareas ,como aquélla, que es novedosa para los alumnos, requiere que el maestro gestione tres tensiones fundamentales. La primera es una tension entre los objetivos de la tarea—los objetivos comunicados a los estudiantes con la tarea y los objetivos perseguidos por el diseño de la tarea. La segunda es una tensión entre los objetos concretos de cartulina y los modelos matemáticos de aquéllos, triangulos planos—se refiere a las representaciones de las ideas en juego. La tercera es una tensión entre lo explícitamente desautorizado y lo implícitamente útil—se refiere a las operaciones que los estudiantes pueden o no deben ejecutar. Estas tres tensiones ilustran un punto fundamental sobre la negociación del contrato didáctico para una tarea novedosa—ésta requiere mucho trabajo de parte del maestro. Si bien es posible que el maestro negocie el contrato para mantener a la tarea como representacion de las matemáticas en juego, también es probable que la tarea se altere como resultado de la necesidad de negociar el contrato didáctico que pueda mantener la estabilidad de la relación entre el maestro y el alumno.

La negociación del contrato didáctico para una tarea novedosa puede requerir mucho trabajo y resultar en alteraciones fundamentales a los conocimientos en juego, lo cual de por sí justifica nuestro interés en estudiar la *racionalidad* empleada en enseñar clases ordinarias: Aquellas clases en las que no se está implementando ninguna intervención sino que el maestro está enseñando tal como lo haría normalmente. Si bien la enseñanza de clases ordinarias tambien requiere manejar complejidad, la observación de clases ordinarias da cuenta de que hay muchas tareas matemáticas que no parecen requerir tal negociación del contrato. Hay tareas que parecen apelar a contratos locales implícitos que obvian la necesidad de una negociación. Tanto el maestro como los alumnos actúan como si supieran qué les corresponde hacer. Nos ha interesado caracterizar estos contratos locales pues si ellos sirven para describir períodos de estabilidad de la relación didáctica, sus características pueden ser tremendamente útiles a la hora de predecir y entender las dificultades de gestión del contrato en clases donde se usan tareas novedosas. nuevas.

Situaciones de instrucción

Utilizamos la expresión *instructional situation* o *situación de instrucción* para hablar de aquellos contratos didácticos locales que sirven de contexto para el trabajo de los estudiantes en tareas familiares. Una situación de instrucción incluye normas específicas al conocimiento, que son, sin embargo, repetibles en el contexto de tareas similares. Tres ejemplos de situaciones de instrucción en la clase de geometría de la escuela secundaria en Estados Unidos son las situaciones de *exploración*, de *cálculo*, y de *demostración*. En cada una de ellas hay ciertas cosas que se mantienen tácitas, es decir que no son objeto de negociación explicita, y que tanto maestros como alumnos actúan como si supieran qué es lo que ellos deben de hacer.

Por ejemplo en la situación de *cálculo* (*geometric calculation in number*, Hsu & Silver, 2014; *geometric calculation in algebra*, Boileau & Herbst, 2015) el maestro les da a los alumnos un diagrama con información acerca de la figura representada, incluyendo las longitudes de algunos lados o las amplitudes de algunos ángulos, y les pregunta a los estudiantes algo sobre la figura (ordinariamente la medida de un lado o de un ángulo). Los estudiantes saben que no se espera que midan nada sino que usen la información dada para calcular sin medir. Por otra parte el maestro sabe que, de alguna manera, tiene que dar información suficiente y no contradictoria para que los alumnos encuentren la respuesta a la pregunta mediante un cálculo. Las situaciones de *exploración* son muy distintas: en ellas el maestro también da un diagrama o artefacto concreto, pero los estudiantes saben que pueden que hacer algo más concreto con la figura, por ejemplo utilizar instrumentos de medición. En situaciones de *demostración* también se da un diagrama con información distinta de la provista en situaciones de cálculo o de exploración (ver Figura 2b) y se espera que los estudiantes interactúen con el diagrama sin medir.

Cuando hablo de situaciones de instrucción me refiero a contextos en los cuales distintas tareas pueden enmarcarse, aunque la división del trabajo use las mismas normas en cualquiera de esas tareas. Cada situación de instrucción puede usarse para organizar el trabajo de la clase y cada una enmarca puede enmarcar tareas distintas. Por ejemplo, una situación de exploración puede enmarcar simultáneamente el descubrimiento de propiedades de los ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una transversal y el descubrimiento de las propiedades del romboide. Pero lo que nos interesa no es solamente que hay tareas distintas que pueden enmarcarse en la misma situación, sino que ésas tareas tienen regularidades; ellas recurren varias veces durante el año lectivo or año tras año en la práctica docente. A estas regularidades las llamamos *normas* de instrucción, o más específicamente normas de una situación de instrucción.

Volviendo a la noción del intercambio, una situación de instrucción enmarca o contextualiza el trabajo del maestro, de manera que el maestro gestiona el intercambio entre el trabajo que ve hacer a los estudiantes y los objetos de conocimiento que quiere leer de ésa interacción. El enmarcar la tarea en una situación permite que haya ciertas normas que facilitan ése tipo de lectura, por ejemplo diciéndole al maestro qué cosas ver y qué cosas ignorar, y diciéndole al estudiante qué cosas puede hacer y qué cosas no debe hacer.

El registro diagramático y la investigación sobre las normas

Habiendo introducido la noción fundamental de norma de una situación, ahora podemos volver al problema original y abordar cuestiones metodológicas. ¿Cómo cree que el maestro enunciará el problema sugerido en la Figura 1 si se espera que los estudiantes hagan una demostración?

El registro diagramático

A partir de nuestras observaciones de situaciones de demostración en la clase de geometría en Estados Unidos, hemos conjeturado que la norma de enunciación de problemas de demostración es que éstos se enuncian en lo que llamamos el *registro diagramático* o *diagramatic register* (Herbst, Kosko, & Dimmel, 2013; ver también Boileau, Dimmel, & Herbst, 2016). Esta norma tiene cinco incisos o subnormas, a saber:

> Que el enunciado del problema no hace referencia explícita a propiedades de incidencia, orden, separación, colinearidad, o concurrencia, las cuales se dejan libradas al diagrama para comunicar. En eso, los problemas de prueba siguen una norma similar a los Elementos de Euclides, muy distinta de la geometría de Hilbert (véase también Manders, 1995).
>
> Que el maestro provee un diagrama para que los estudiantes lo usen cuando hagan la prueba en vez de dejar que los estudiantes hagan un diagrama.
>
> Que el diagrama provisto por el maestro es tal que todos los puntos que se necesitarán usar para enunciar las propiedades dadas o a probar y para hacer la prueba han sido identificados con letras, aunque no todos los puntos del diagrama son identificados con letras.

> Que tanto la proposición dada como hipótesis (datos) como la proposición a probar se enuncian utilizando símbolos y letras que identifican a objetos en el diagrama, en lugar de palabras que representan a los conceptos involucrados.
>
> Que el diagrama es por lo general suficientemente exacto como para que las proposiciones dadas y a probar puedan ser creíbles al ver el diagrama.

Me permito aclarar que estos incisos son parte de una conjetura sobre la norma de instrucción: Conjeturamos que la norma es que los problemas de demostración se enuncien siguiendo tal norma. Es una conjetura descriptiva en vez de prescriptiva, pues intenta describir una realidad; al enunciarla no indicamos nuestra adhesión a la misma. Más aún es una conjetura en tanto está supeditada a su verificación empírica. En lo que sigue describo como emprendemos la verificación empírica y para qué creemos que tal verificación sirve.

Consideremos la decisión entre las dos posibilidades dadas en la Figura 2. Si comparamos nuevamente los dos enunciados de la Figura 2a y 2b, hay dos cosas en particular en el enunciado dado en 2a que lo hacen menos probable que el enunciado de la Figura 2b: primero, el diagrama no incluye un diagrama del romboide, segundo la proposición está enunciada conceptualmente, transgrediendo así los incisos segundo y cuarto enunciados más arriba. En el problema presentado en la Figura 2b se incluye el diagrama del romboide y letras identificando los vértices del trapecio y del romboide. Sin embargo, el enunciado de la derecha (Figura 2b) también expresa la propiedad a probar en términos conceptuales, no en términos de los objetos en el diagrama. Así pues, el enunciado de la derecha tampoco se adhiere a la norma del registro diagramático totalmente, aunque está más cercano a esa norma. Sin embargo, el hecho de que el enunciado además usa la palabra "prove" (pruebe) al indicar qué se espera del estudiante (en contraste con el enunciado de la izquierda que sólo pregunta "por qué?"), hace que podamos predecir que quienes han sido socializados en la norma (por ejemplo, maestros que tienen experiencia enseñando geometría en Estados Unidos), reconocerán la opción de la derecha (Figura 2b) como la más apropiada (ver Herbst et al., 2009).

Las alternativas mostradas en la Figura 2 son dos de cuatro alternativas que les ofrecemos a los maestros que responden a nuestros cuestionarios de toma de decisiones que también se pueden describir utilizando la hipótesis de que la norma es enunciar los problemas usando el registro diagramático. Más generalmente, se puede ver cómo funciona la noción de norma en la creación de un ítem de toma de decisiones. Si se plantea tomar una decisión en un momento en el que la decisión se supone afectada por una norma, las opciones de cumplir con la norma o transgredir la norma se pueden usar para generar las alternativas de la decisión.

Ante las nociones de situación y de norma, uno se podría preguntar ¿qué ganamos con ellas? o ¿para qué nos sirven? Las nociones de transacción o intercambio, contrato, y situación nos permiten describir la matemática que está en juego para el maestro en la toma de decisiones. La noción de norma nos permite describir las demandas específicas de la situación en la que se toma la decisión. Podemos pensar la instrucción matemática en un curso de estudios como una sucesión finita de transacciones, muchas de las cuales se facilitan mediante situaciones de instrucción que se suceden durante el año, mientras que unas pocas de ellas se facilitan mediante tareas que son nuevas y para las cuales hace falta negociar el contrato didáctico.

Entonces si queremos entender el costo de una decisión, podemos considerar ¿qué tipo de transacción?, ¿en cuál contrato?, ¿en cuál situación?, ¿en qué tipo de transacción se ubica la decisión que se va a tomar? Y si la transacción se enmarca dentro de una situación de instrucción, ¿en qué medida la decisión a tomar transgrede una norma de la situación?

Esa es una manera de operacionalizar el problema de toma de decisiones dentro de la teoría. Para la decisión a tomar en el ejemplo, desde el punto de vista de nuestra teoría, ambas decisiones se desvían de la norma, pero de manera distinta. Y se podría decir que la de la izquierda se desvía mucho más que la de la derecha. Por supuesto que eso no quiere decir que todo el mundo tomará la misma decisión. Nos interesa dar cuenta del fenómeno de toma de decisiones, y para ello la noción de norma es útil: Nos permite predecir decisiones posibles.

El maestro puede, por supuesto, decidir hacer algo que implica una desviación de la norma, en cuyo caso predecimos que le costará más trabajo gestionar la instrucción, lograr que el estudiante haga lo que el maestro espera para poder decir que el estudiante sabe demostrar. Pero si el maestro presentara el enunciado de la izquierda, puede ser que haya cosas que ganar también: Imagínese que uno les pregunte a los estudiantes por qué se puede decir aquéllo y ellos le expliquen que la simetría del trapezoide isósceles hace que sus bisectrices generen un cuadrilátero con dos pares de lados congruentes. Puede que la tarea del maestro se haga más dificil, pero tambien que permita generar evidencia de que los estudiantes están pensando racionalmente sobre la geometría.

Pero concentrémonos en la norma por un momento. La pregunta empírica es ¿cómo sabemos que tales normas lo son? Hasta ahora yo he afirmado que aquéllas son las normas, pero también le he dicho que la noción de norma no es prescriptiva, sino descriptiva. ¿Cómo verificamos tal hipótesis descriptiva?

De los experimentos de ruptura a los experimentos virtuales de ruptura en línea

Una de las herramientas metodológicas que hemos utilizado es la noción de *breaching experiment*, o *experimento de ruptura*, de Harold Garfinkel (ver Mehan & Wood, 1975). Garfinkel fue un sociólogo que empezó a trabajar en los años 60, y que trataba de modelar las acciones prácticas de la gente en situaciones muy comunes como por ejemplo esperando a que le den a uno una mesa en un restaurante. Para estudiar como la gente manejaba aparentes diferencias en las maneras de hacer las cosas, Garfinkel identificaba las normas de situaciones sociales y luego involucraba a participantes en versiones de aquéllas situaciones en donde había una desviación de la norma. Se podría decir que un experimento de ruptura es algo parecido a una *practical joke,* una travesura o broma pesada. Por ejemplo imagínese que yo estoy sentado en un café, hay otras mesas en el café, incluso mesas vacías, yo estoy tomando un café sólo y alguien compra su café y se sienta en mi misma mesa. Eso es un ejemplo de una ruptura, ¿por qué? Porque si hay otras mesas donde esa persona se puede sentar, la norma sería que esa persona se siente en una de las mesas vacías. Al venir a sentarse conmigo, esta persona está haciéndome partícipe de una ruptura y generando la necesidad de negociar el espacio social. Por ejemplo yo podría preguntarle "¿están todas las otras mesas sucias?," "disculpe, nosotros nos conocemos?," o "puedo ayudarle en algo," las cualea implican mi sorpresa de que él venga a sentarse conmigo, mi expectativa de que se siente en otro lado, pero también abren la posibilidad de que haya venido a mi mesa con alguna razón. Lo que hacemos cuando entramos en ése tipo de negociación de lo que está pasando, es que verificamos que la norma existe. Garfinkel llama *repair strategies* (o, en castellano, *reparos*, no reparaciones) a esas movidas que abren una negociación cuando una norma no se ha cumplido.

Nosotros hemos adoptado la metodología de los experimentos de ruptura para hacer investigación sobre las normas de la instrucción en matemáticas. Comencé haciendo este trabajo en clases de geometría, utilizando intervenciones donde, por ejemplo, uno de nosotros tomaba el rol de maestro y gestionaba la instrucción de manera tal que alguna de las normas de una situación no se cumplieran. Por ejemplo en la lección analizada por Herbst & Chazan (2003) tomé yo mismo el papel del maestro y alenté a un estudiante a que prosiga con escribir las afirmaciones de una demostración a pesar de que el estudiante no había podido justificar la última afirmación enunciada. La norma hipotetizada es que en la escritura de una prueba, cada enunciado debe de ser acompañado de su justificación antes de que se emita el siguiente enunciado (véase Herbst, Chen, Weiss, & González, 2009). Este experimento de ruptura tenía como objetivo, entre otras cosas, ver cómo se adaptaba el resto de la clase, incluyendo el maestro dueño de la clase que estaba presente ahí, a una situación de demostración que se desviara de la norma, cómo el maestro daba cuenta de que había habido una desviación y como reparaba el presunto daño que nosotros habíamos hecho. Otros experimentos en clase incluyeron colaborar con maestros en diseñar e implementar lecciones y hasta unidades de estudio donde los problemas enunciados contradecían las normas de instrucción. Por ejemplo Herbst (2005, 2006) describe unas lecciones sobre área en las que el maestro les pidió a los estudiantes que probaran un resultado, en un dominio de conocimientos (área) para el cual los estudiantes no tenían acceso a postulados o definiciones que pudieran usar como justificaciones de los enunciados que ellos deberían de incluir en la demostración. También en estos casos nuestro objetivo fue de ver como la clase y el maestro se adaptaban a trabajar en un contexto donde las normas usuales no fueran cumplidas, lo que de paso nos permitió confirmar nuestras conjeturas de que aquellas normas eran tales. En Herbst (2012) describo, en castellano, como diseñamos tareas para que, al usarse aquéllas para ocasionar rupturas de las normas de situaciones (o contratos), sirvan de instrumentos de investigación en la enseñanza. Herbst & Balacheff (2009) elaboran como esta transgresión de las normas de la prueba pudo dar lugar a una concepción distinta de la prueba en la clase.

Luego de haber hecho algunos experimentos de ruptura en clases buscamos maneras de obtener mejor acceso a las perspectivas con que los maestros responden a las transgresiones de la norma. Para ello desarrollamos la idea de *experimentos virtuales de ruptura*, utilizando videos de situaciones en clase donde una norma se había transgredido y presentándoselas a maestros reunidos en grupos focales (*focus groups)*. Nuestro objetivo ha sido ver cómo los maestros describen lo que ven, cómo discuten entre ellos qué es lo que estaba pasando. Al gestionar esos grupos focales nosotros no decimos nada que dé la idea de que pensámos que una norma se ha transgredido, pero grabamos el discurso de los maestros y utilizamos el análisis del discurso de los maestros para tratar de confirmar que las normas existen. Ejemplos de este tipo de trabajo se pueden ver en los artículos de Nachlieli & Herbst (2009) y Weiss, Herbst, & Chen (2009).

En una tercera iteración de nuestro uso de experimentos de ruptura, comenzamos a representar instancias de ruptura usando animaciones de caracteres animados en lugar de videos. Continuamos presentando estos videos a grupos focales, pero la decisión de representar acciones usando caracteres animados nos ha permitido ser más sistemáticos en nuestra exploración de conjeturas. Los artículos de Herbst, Nachlieli, & Chazan (2011) y Chazan & Herbst (2012) muestran como hemos analizado las respuestas de los grupos focales para entender la racionalidad de la práctica. El artículo de Herbst & Kosko (2014b) muestra que la respuesta de maestros a las animaciones es comparable a sus respuestas a videos, en lo que concierne a sus reparos sobre las rupturas de las normas. Tanto estos experimentos virtuales con animaciones como los anteriores con videos, sin embargo, solamente sirven como prueba de la existencia de un fenómeno. Su medición nos ha requerido buscar una manera de obtener datos en cantidades mayores y usando una variedad de items. Esto lo hemos logrado en la cuarta etapa, usando lo que llamamos *online virtual breaching experiment* o *experimento de ruptura virtual en línea* (Herbst & Chazan, 2015).

En nuestro estudios más recientes, hemos estado utilizando los mismos caracteres animados que antes usábamos en las animaciones para crear *storyboards, comic strips*, o tiras cómicas, donde se muestra una situación de instrucción en la que una norma se ha transgredido (y como control, tiras cómicas en las que ninguna norma se ha transgredido). Distribuimos esas representaciones en línea y le pedimos a los participantes que describan lo que ven. Examinamos lo que escriben los maestros en respuesta a estas representaciones y buscamos en esas reacciones evidencia de que ellos reconocen que una norma de instrucción ha sido transgredida. En la tesis de Justin Dimmel (véase Dimmel & Herbst, 2014, 2015) se utiliza esta técnica en el contexto de un diseño experimental, es decir con asignación aleatoria de participantes a dos condiciones distintas: ver una representación de una situacion con una transgresión o verla sin la transgresión. Del análisis de las respuestas se obtienen medidas que luego pueden ser analizadas usando tests de hipótesis.

Los cuestionarios en línea basados en tiras cómicas los hemos usado en gran cantidad recientemente para estudiar una variedad de fenónemos. Los hemos utilizado en álgebra y en geometría para estudiar normas relativas a la presentación de los enunciados de prueba en geometría, la importancia del método de resolución de ecuaciones en álgebra, o la importancia del tipo de registro en la resolución de problemas de palabras en álgebra. También hemos utilizado las tiras cómicas para plantear problemas de toma de decisiones, donde, por ejemplo, se representa una situación hasta el momento en que una norma se debería de aplicar, y luego se le pide al participante que elija una de entre cuatro posibles maneras de actuar—una de ellas es la normativa mientras que las otras son otras acciones posibles. Los artículos de Herbst, Chazan, Kosko, Dimmel, & Erickson (2016) y Erickson & Herbst (2016) muestran resultados preliminares del análisis de esos cuestionarios. Finalmente, también hemos utilizado tiras cómicas para recabar datos que informan en qué medida los maestros están dispuestos a justificar acciones que se distancian de una norma para atender a una obligacion profesional.

Evaluando la norma del registro diagramático

En lo que sigue me concentro en el registro diagramático del que hablaba al principio. Para estimar en qué medida alguien reconoce a la norma del registro diagramático hemos creado ítems que incluyen una tira cómica en la que se representa una situación de demostración y donde la norma ha sido transgredida, le pedimos al participante que describa lo que ha visto y luego que evalúe cuán apropiada ha sido la acción del maestro. Codificamos las descripciones buscando evidencia lingüística de que el maestro reconoce la transgresión, mediante, por ejemplo, mencionarla explícitamente, diciendo qué fue lo que el maestro no hizo que debería de haber hecho. Con esas codificaciones construimos medidas. Una medida es *norm recognition score* (o medida de *reconocimiento de la norma*), que es la cantidad (o el promedio) de los ítems en los que el maestro reconoce la ruptura de la norma. Otra medida es *appropriateness score* (o medida de *lo apropiado de la acción*) que es el promedio de las evaluaciones que los participantes ofrecen a cada una de las representaciones mostradas.

Esas definiciones se operacionalizan en versiones de un instrumento al que llamamos *INR* (Implicit Norm Recognition, o Reconocimiento Implícito de la Norma). En cada una de las versiones del INR ofrecemos cuatro representaciones de la situación de demostración en la forma de tiras cómicas que muestran como el maestro organiza una situación de demostración, y en particular como enuncia el problema. Para cada una de ellas les pedimos a los participantes que (1) describan lo que ven en la tira y (2) que evalúen, en una escala de 1 a 6 cuán apropiada creen ellos que es la acción del maestro. Las dos versiones del INR son el INR (DP-DR) en el cual las cuatro tiras cómicas muestran instancias en las que la norma del registro diagramático ha sido transgredida, y el INR (DP-C) en el cuál las cuatro tiras muestran instancias en que la situación de demostración se ejecuta sin transgredir ninguna norma. Luego comparamos las medidas de reconocimiento y de lo apropiado de la acción para los dos versiones de INR, utilizando tests de hipótesis para la diferencia de las medidas de reconocimiento y de lo apropiado de cada persona en cada versión del instrumento, donde la hipótesis nula es que la diferencia media es 0. Herbst, Dimmel, & Erickson (2016) hicieron aquello y encontraron que hay evidencia de que las medidas de reconocimiento de la norma son significativamente mayores cuando los maestros responden a representaciones de ruptura (el caso del instrumento INR (DP-DR)) que cuando responden a representaciones donde la norma se ha mantenido (el caso del instrumento INR (DP-C)). Esto sugiere que es más probable que los maestros reconozcan la norma cuando presencian su transgresión que cuando presencian su cumplimiento. Además Herbst, Dimmel, & Erickson (2016) encontraron diferencias en las medida de lo apropiado de la acción: Los participantes consideraron significativamente más apropiada las acciones del maestro cuando el maestro cumplió con la norma que cuando no cumplió con élla.

*Creación de los experimentos virtuales de ruptura online con Lesson*Sketch

Los cuestionarios descriptos más arriba los hemos construído y diseminado usando la plataforma Lesson*Sketch* (www.lessonsketch.org). Una de las herramientas en Lesson*Sketch* es la aplicación *Depict* que permite crear las tiras cómicas. Otra herramienta, llamada *Plan*, permite crear las preguntas, asociarlas a las tiras cómicas, identificar las variables, y diseñar el flujo lógico, incluyendo la asignación aleatoria. Una tercera herramienta, *Experience Manager,* permite distribuir los cuestionarios a una muestra de maestros. Luego cuando los maestros contestan los cuestionarios, *LessonSketch* provee tres tipos de reportes, un reporte de cuáles fueron las respuestas, un reporte de cómo los participantes interactuaron con los medios (por ejemplo si vieron completas las tiras cómicas), y un reporte del tiempo de navegación para cada pantalla. Para más información sobre Lesson*Sketch*, véase Herbst, Aaron, and Chieu (2013) o Herbst, Chazan, Chieu, Kosko, Milewski, & Aaron (2016).

Desviaciones de la norma y su justificación

La afirmación que he hecho hasta ahora es que las actividades de instrucción que se enmarcan dentro de situaciones de instrucción requieren menos negociación del contrato didáctico que aquellas que involucran tareas novedosas. Situaciones de exploración o de demostración son ejemplos de eso. Esas situaciones contienen expectativas para las decisiones del maestro o normas que van de suyo, es decir que si se cumplen la gente tiende a no mencionar que una norma se ejecutó, pero que si no se cumplen llaman atención a sí mismas, generando la necesidad de negociar el contrato. La norma de que en situaciones de demostración el problema se enuncia usando el registro diagramático es un ejemplo de esas expectativas. Y como mostramos más arriba, hay maneras de verificarla empíricamente. Las situaciones de instrucción pueden describirse como segmentos de prácticas especializadas en ése sentido socio-técnico, segmentos de prácticas caracterizadas por un conjunto de normas que van de suyo.

Ahora bien, obviamente los maestros son personas con libre albedrío. El hecho de que aquellas situaciones de instrucción con sus normas existan no quiere decir que sea obligatorio para un maestro cumplir con esas normas. Al actuar en instrucción, tanto los maestros como los alumnos pueden desviarse de la norma, pues esas normas no son leyes físicas que actúen contra la voluntad, ni tampoco son leyes legales que tengan el apoyo de la acción represiva del Estado cuando se transgreden. Se trata de normas sociales (o mejor sociotécnicas) que señalan un camino que parece como el más natural o sencillo desde el punto de vista de los maestros; su transgresión puede tener un costo (por ejemplo, el ridículo o la frustración) pero tal vez también un beneficio (por ejemplo, la novedad o la diversión). La existencia de esas normas se debe a razones probablemente históricas y culturales. Es obvio, entonces, que los maestros pueden transgredir una norma dentro de una situación, incluso transgredir tantas normas que la situación no proporcione ya ninguna ayuda para evitar la negociación del contrato.

Desviación de las normas y promoción del aprendizaje

Desde el punto de vista de la promoción del aprendizaje, ese tipo de transgresiones de las normas son necesarias: Si las situaciones donde todas las normas se cumplen dan la oportunidad a los estudiantes para que hagan lo que saben hacer, tiene que haber otras oportunidades en las que los estudiantes puedan aprender a hacer cosas que no saben. Una consecuencia teórica de esto es la predicción de que al menos en algunos momentos discretos durante el año, las situaciones de instrucción que han estado sirviendo para organizar el trabajo que los estudiantes saben hacer se tendrán que transgredir de alguna manera. Esto sugiere que hay una especie de dialéctica entre la práctica y el aprendizaje en tanto cambio progresivo de prácticas, en ésta dialéctica el uso de situaciones y sus normas se alterna con transgresiones de algunas normas y negociación de nuevas situaciones.

Las nociones de contrato, situación, y norma, tal como han sido usadas hasta ahora podrían parecer un poco estáticas en la medida que describen prácticas estables. La noción de que la promoción del aprendizaje por parte del maestro se puede operacionalizar en términos de la transgresión de normas en situaciones y contratos permite asimilar la promoción de los aprendizajes a una teoría de la práctica. Nosotros pensamos en aquéllas normas no tanto como requisitos sino como recursos para la acción del maestro; son recursos que la actividad de instrucción hace disponible al maestro para decidir qué hacer. Más aún, en la medida que el trabajo en organizaciones como los salones de clase es dinámico, la transgresión de las normas puede ser un hecho relativamente frecuente.

¿Cómo podemos utilizar las nociones de norma, situación, y contrato para describir una realidad más dinámica, como la toma de decisiones en instrucción? Volviendo al ejemplo en las Figuras 1 y 2: El maestro podría decirles a los estudiantes que copien el diagrama del tablero y trabajen con el compañero en el problema dado en cualquiera de los casos mostrados en la Figura 2. Tal decisión podría ser deseable en la medida que puede crear oportunidades para el aprendizaje—ésto es un beneficio posible, no seguro. Además, en la medida que al hacer eso el maestro transgrede una o más normas, podemos predecir que esa elección tendrá ciertos costos. Entonces, en la medida que la decisión es viable, que un maestro la puede tomar y generar con élla cierta actividad de parte de los estudiantes, cabe la pregunta de cómo justificar esa decisión: ¿Bajo qué consideraciones sería razonable para un maestro presentar el problema así? Podemos pensar esta pregunta como una cuestión de recursos: ¿Qué tipo de recursos tiene disponible el maestro para justificar el costo de transgredir una norma?

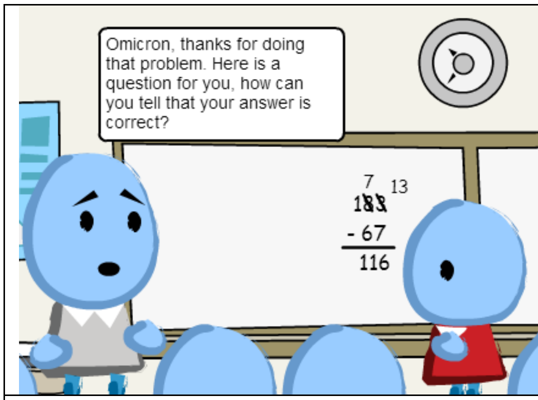
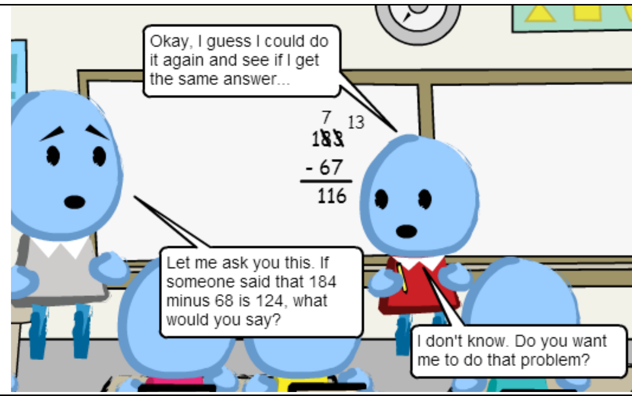
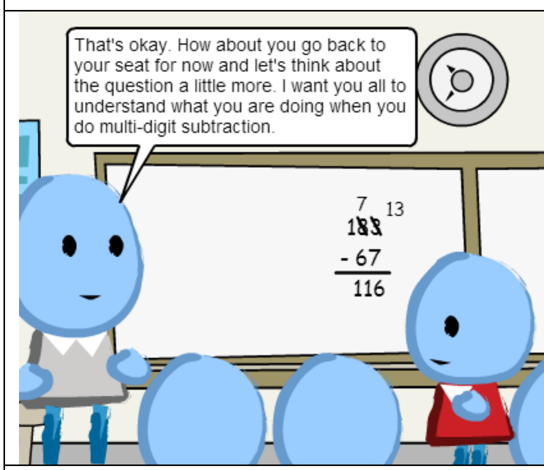
Recursos para justificar las transgresiones de la norma: Obligaciones profesionales

El conocimiento y las creencias del maestro pueden ser recursos que le permitan al maestro componer acciones que se desvían de la norma. El diagrama en la Figura 2a no es para nada común y alguien tiene que tener la idea de dibujar el diagrama de esa manera. El orígen de la transgresión puede estar en los recursos individuales, así como en recursos institucionales como las notas de un colega o un libro de texto alternativo. Pero transgredir la norma requiere trabajo extra, incluyendo la posibilidad de tener que renegociar el contrato didáctico para la tarea. ¿Que recursos le permiten al maestro justificar tal decisión, considerando que el costo de la transgresión es mayor que el costo de cumplir con la norma? ¿Y a qué nos referimos con mayor costo? Puede ser que se necesite más tiempo para que los estudiantes hagan un problema presentado con una transgresión, y el tiempo no es solamente el tiempo del maestro, el tiempo también es de los estudiantes; los maestros de secundaria en Estados Unidos tienen que coordinar el paso al que van en las lecciones con colegas que enseñan el mismo curso a otros grupos de estudiantes, de modo que la necesidad de justificar una transgresión que conlleva mayor uso del tiempo es una necesidad muy real, no depende solamente de si el maestro quiere dedicar más tiempo a la tarea pues puede quitarles tiempo a los estudiantes que ellos necesitan para estudiar otras cosas en las semanas que siguen. Pero ante tal costo, por ejemplo ante el costo institucional en tiempo y la posible pérdida de coordinación con otras secciones del mismo curso, seguramente hay otras consideraciones que sugieren un beneficio. ¿Qué beneficio podría tener el presentar un problema en la manera del caso de la Figura 2a? Una posibilidad es el aliciente de que los estudiantes tendrían la oportunidad de pensar en las razones antes de visualizar la figura, o que tendrían que usar razones para corregir la visualización de la figura que obtengan al extender las bisectrices. Éstos son alicientes matemáticos—el diagrama en el caso de la izquierda parece que daría más oportunidad a los alumnos de experimentar (en el sentido de tener una vivencia) la demostración como un proceso racional.

Herbst & Chazan (2012; véase tambien Chazan, Herbst, & Clark, 2016) han propuesto la noción de *professional obligations* (u *obligaciones profesionales*) para identificar recursos para la justificación de las acciones con las que podemos formalizar estas nociones de costo y beneficio. De la sociología de Bourdieu (1990) tomamos la noción de *disposición*, para describir tendencias que son vivenciadas como naturales por individuos, pero que se relacionan con la posición social en la que aquéllos están. En el caso de los maestros de matemáticas, por ejemplo, hay quienes están dispuestos a utilizar solamente el libro de texto como fuente de problemas y hay quienes buscan problemas fuera del libro; ambas opciones son, por supuesto, concebibles y aceptables, pero lo que nos interesa es que ellas subtienden un espacio de posibilidades en el cuál se espera que los maestros tengan una disposición aún si las disposiciones particulares son distintas entre colega y colega. Esto es interesante puesto que que hay otros espacios donde no se espera que lo maestros de matemáticas tengan una disposición profesional. Por ejemplo, si bien podemos esperar que los maestros tengan una opinión profesional sobre si usar problemas que no estén en el libro, no tenemos derecho a esperar que los maestros de matemáticas tengan una opinión profesional sobre la muerte digna, sobre el aborto, o sobre la intervención militar contra ISIS: Habrá maestros que están a favor de la muerte digna, otros que estan en contra, y otros que nunca antes han pensado en la cuestión; este último grupo es el que nos hace ver la diferencia entre esos espacios de opiniones personales y aquéllos en los que se espera de los maestros una disposición profesional.

Esos espacios en los cuales podemos esperar que los maestros de matemáticas tengan una disposición los agregamos en cuatro conjuntos a los que llamamos obligaciones profesionales. Uno de esos espacios es la matemática como disciplina (*disciplinary obligation*), luego los estudiantes como individuos (*individual obligation*), luego la clase como grupo social (*interpersonal obligation*), y finalmente las instituciones educativas (*institutional obligation*). Nuestra afirmación es que esas cuatro obligaciones profesionales reúnen aspectos de la práctica profesional para los cuales los maestros deben de tener una disposición (aunque la disposición particular entre maestros individuales puede ser distinta; en efecto aquí hay un punto de contacto con la noción de creencias, en la medida que las obligaciones subtienden espacios de disposiciones que corresponden a lo que algunos describen como creencias; véase Philipp, 2007). Afirmamos que esas obligaciones agrupan disposiciones que proveen recursos para la justificación de la acción. Una manera de utilizar esta noción de obligación profesional, entonces, es decir que cuando el maestro toma una decisión que transgrede una norma, tal decisión se puede justificar o criticar en referencia a alguna de estas obligaciones—por ejemplo, que la decisión tiene un costo o que provee un beneficio relativo a alguna de esas obligaciones.

Por ejemplo el problema en la Figura 2a es matemáticamente más interesante que el problema de la derecha, porque da la oportunidad de observar a los estudiantes haciendo un trabajo matemático más interesante. El problema de la izquierda también requiere a los estudiantes que experimenten la necesidad de convenciones para hacer posible la comunicación: Porque no hay letras en el diagrama, pero si los alumnos no ponen las mismas letras, les será muy difícil poder trabajar juntos. Si el maestro prefiriera usar ese problema, podríamos entender esta decisión como una desviación de la norma que también es justificable atendiendo a una obligación a la clase como un grupo social, por cuanto les da a los alumnos una oportunidad para aprender a comunicarse.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Maestro: Omicron, gracias por hacer ese problema. Tengo una pregunta para ti… ¿como podrías saber si tu respuesta es correcta?</td>
<td>Omicron: Me imagino que podría hacer de nuevo el problema y ver si me da lo mismo
Maestro: que tal si alguien te dice que 184 menos 68 es 124, ¿que le dirías?
Omicron: No sé. ¿Quiere usted que haga ese problema?</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Indique su grado de acuerdo con la siguiente afirmación
El maestro debía de haber aceptado la solución correcta del estudiante en lugar de hacer una pregunta distinta
1—total desacuerdo …
6—total acuerdo
Comentario:</td>
</tr>
<tr>
<td>Maestro: Está bien. ¿Que tal si te sientas por ahora y piensas en la pregunta un poco más? Me interesa que todos ustedes entiendan lo que están haciendo cuando resuelven problemas de sustracción con varias cifras.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Figura 4. Un ítem de reconocimiento de obligaciones profesionales</td>
</tr>
</table>

Para cada una de las cuatro obligaciones profesionales, nosotros definimos el constructo *reconocimiento de una obligación profesional* y lo medimos utilizando cuestionarios que tienen entre 15 y 18 ítems cada uno. Cada ítem incluye una escena de instrucción dada con una tira cómica donde el maestro ha hecho algo que se desvía de la norma, y una afirmación del tipo “el maestro debería haber hecho [lo normativo] en lugar de hacer [lo que hizo].” Se les pide a los participantes que indiquen su grado de acuerdo con la afirmación en una escala de 1 a 6 y que comenten su evaluación usando una respuesta abierta. Los valores que ellos le dan a cada ítem se utilizan para proveer una estimación del grado en el cuál reconocen la obligación en cuestión, o sea en la medida en que son capaces de justificar a los maestros por no haber seguido la norma, y tomamos el promedio de esos scores como una medida del reconocimiento de una obligación particular (Herbst et al., 2014; Herbst, Chazan, Kosko, Dimmel, & Erickson, 2016).

Por ejemplo en la Figura 4 tenemos uno de estas escenas presentada en el contexto de una clase de primaria. El maestro aquí ha transgredido una norma: Si bien el estudiante resolvió el problema correctamente, el maestro no le ha dicho nada sobre la calidad del trabajo que hizo el alumno. Si lo que hizo el maestro fuera justificable, ¿cómo se justifica? Nosotros les pedimos a nuestros participantes que digan en qué medida están de acuerdo con la afirmación que el maestro debería de haber aceptado la solución correcta del estudiante en lugar de darle una pregunta distinta.

Entonces si los maestros responden que están muy en desacuerdo con la afirmación en la esquina inferior derecha de la Figura 4, diríamos que reconocen una obligación a la disciplina de las matemáticas: En la medida que las matemáticas deberían permitir al alumno usar lo que hizo en el tablero para dar una opinión sobre el segundo problema presentado, la segunda substracción tiene que dar el mismo valor. Utilizamos una serie de ítems como éste y obtenemos así medidas que dan cuenta de cuán capaces son los maestros de usar una obligación dada para justificar acciones que transgreden normas. Tenemos instrumentos para estimar el reconocimiento de cada una de las obligaciones para cinco niveles de escolaridad, elemental baja, elemental alta, escuela media, escuela secundaria (high school), y universidad.

La toma de decisiones

Volvamos entonces a la toma de decisiones. El estudio de la toma de decisiones en una situación de instrucción, entonces, requiere la hipótesis de una norma de instrucción que indica la acción esperada y de alternativas a tal acción que se desvían de la norma. Operacionalizamos estas alternativas utilizando la noción de obligaciones profesionales—alternativas razonables a la norma pueden encontrarse mediante la hipótesis de que la transgresión de una norma puede tener como beneficio atender a una obligación profesional en particular.

En la investigación empírica nos planteamos preguntas del estilo ¿cuán probable es que un maestro de geometría se desvíe de la norma del registro diagramático cuando presenta un problema de demostración? En el caso del problema que planteamos antes, la Figura 5 muestra qué es lo que ha ocurrido en la clase inmediatamente antes de que el maestro presente el problema (véase la Figura 5). La clase primero recuerda la definición del romboide, luego las propiedades del trapecio isósceles, y finalmente el maestro les dice “vamos a probar que los bisectores de los ángulos del trapecio isósceles son los vértices de un romboide.” Luego de mostrar esta escena les preguntamos a nuestros participantes qué harían ellos, y les damos lugar para una respuesta abierta. Luego les damos cuatro alternativas, que se muestran en la Figura 6.

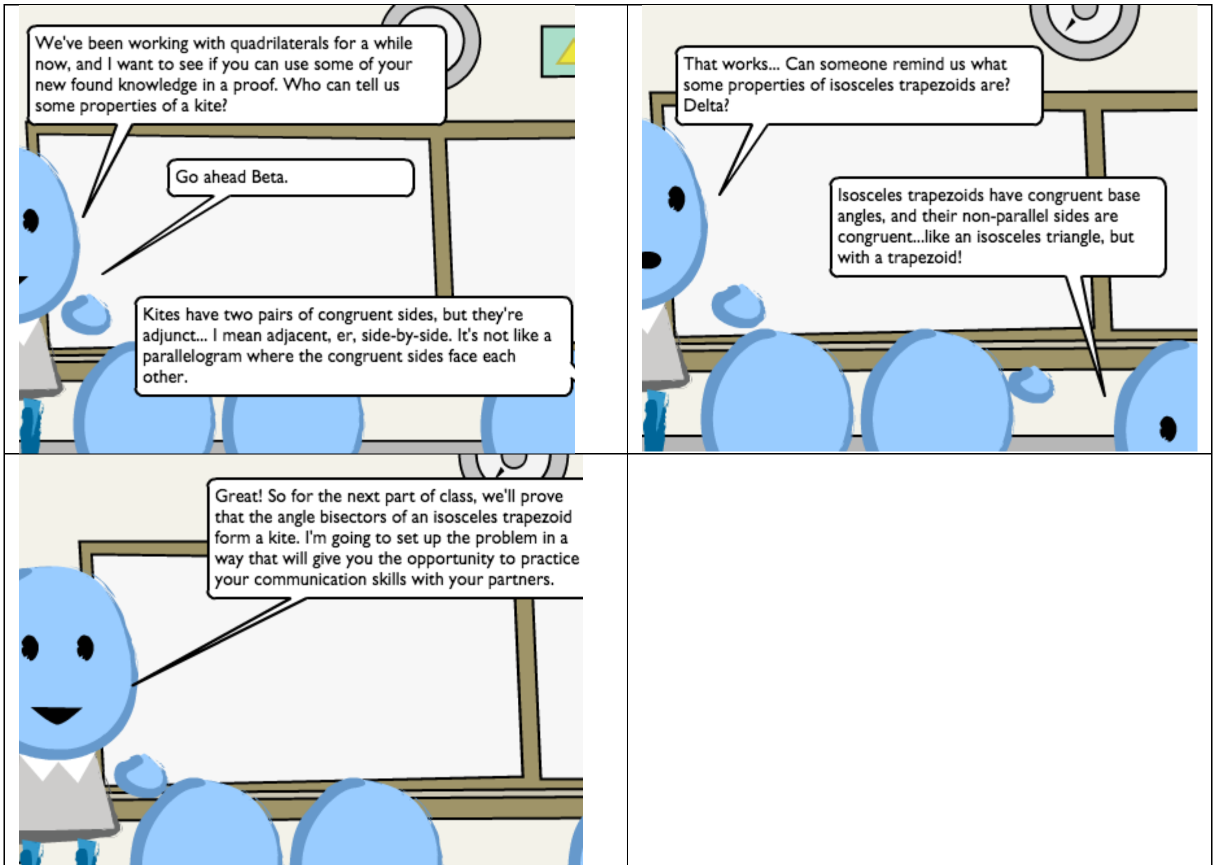
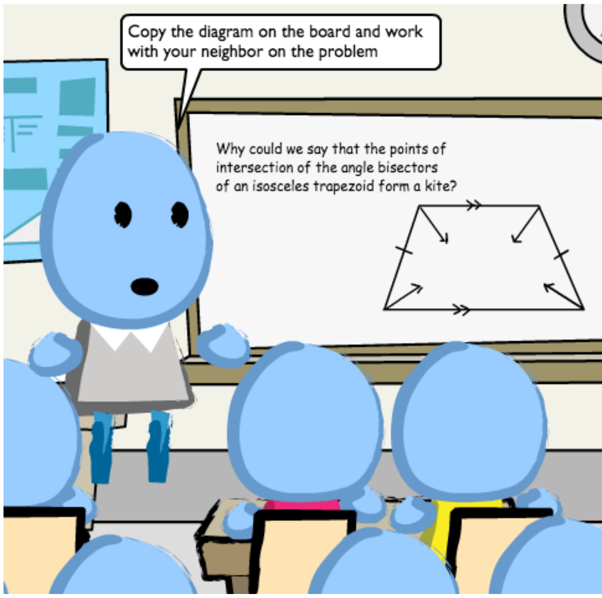
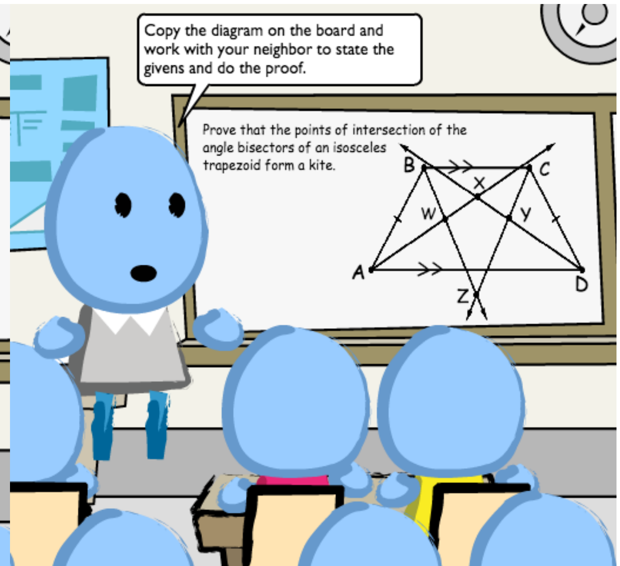


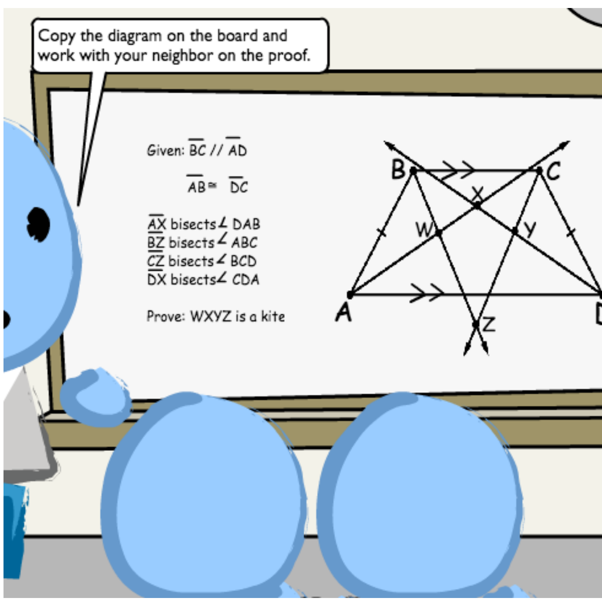
Figura 5. Lo dado para un problema de decisión



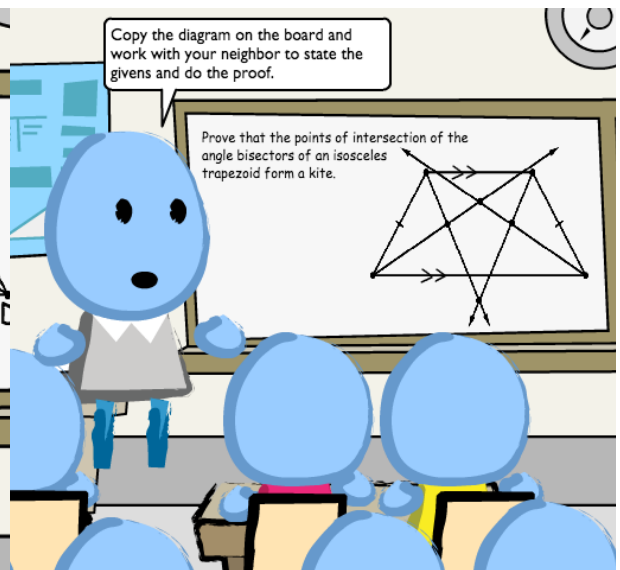
Opción A



Opción B



Opción C



Opción D

Figura 6. Cuatro opciones para la decisión a tomar (ver Figura 5)

Como puede verse, las primeras dos opciones son las que les mostré antes en la Figura 2, luego tenemos la tercera y la cuarta que son nuevas. ¿Cuál opción se apega más a la norma del registro diagramático? La Opción C. Cada una de las otras tiene algo que les falta. Mencionamos más arriba que la Opción A no provee el diagrama del romboide y que la opción B, si bien lo provee a aquél, enuncia el problema en terminos conceptuales. La Opción D, no solo hace éso, sino que también omite las letras para identificar los vértices. Ahora bien, no estamos tan interesados en verificar que todo el mundo elija la Opción C; lo que estamos interesados es en generar variabilidad, para que después podamos explicar ésa variabilidad utilizando regresión (ver Herbst et al., 2016).

Entonces ¿cómo se utilizan nuestros datos? Cada respuesta a cada ítem provee una respuesta categórica, eligiendo una de ésas opciones. Una muestra provee porcentages de participantes que eligieron cada categoría. Podemos utilizar *multinomial logistic regression*, que es una técnica de regresión que nos permite estudiar como variable dependiente la probabilidad de elegir una alternativa a la norma en referencia a la probabilidad de elegir la norma. Unas cuantas variables independientes pueden intentarse como predictores de aquella probabilidad—por ejemplo, la cantidad del conocimiento matemático de los maestros en geometría, el grado de reconocimiento de la norma, o el grado de reconocimiento de las obligaciones.

Para recapitular, nuestro objetivo es diseñar maneras confiables de medir los recursos socio-técnicos disponibles para el maestro, en éste caso el reconocimiento de las normas en una situación y el reconocimiento de las obligaciones profesionales, de tal suerte que podamos usarlos para entender la toma de decisiones en situaciones de instrucción. Nos interesa crear simulaciones de la toma de decisiones en situaciones de instrucción, y dar cuenta de la variabilidad de las decisiones que toman los maestros en términos de factores tanto individuales como socio-técnicos.

Conclusión: Nuestra metodología y la racionalidad de la práctica

Ahora bien, el lector puede que se pregunte por qué usamos los caracteres animados. Ésta es una conexión metodológica importante para nosotros y que puede ser desestimada muy fácilmente. Hay gente que aún considera a los dibujos animados como una cosa de niños; afortunadamente el mercado editorial ha generado en los últimos años un gran producción de novelas gráficas para adultos que cuestiona aquel prejuicio; vean sin ir más lejos las novela graficas de Doxiadis et al. (2010) sobre Bertrand Russell y de Ottaviani & Purvis (2016) sobre Alan Turing. Nosotros hemos estado usando dibujos animados para representar escenas en la enseñanza de las matemáticas para mostrárselas a maestros desde el 2004, pero la primera persona en educación matemática que utilizó dibujos animados para comunicar conocimientos a adultos fue Nicolas Balacheff, quien en un apéndice a su articulo sobre la prueba en matemáticas (Balacheff, 1988) mostró con tiras cómicas dibujadas por Eric Coulomb distintos tipos de pruebas que hacen los alumnos. La cuestión de por qué los dibujos podría dar para otra exposición (véase Herbst, Chazan, Chen, Chieu, & Weiss, 2011, para un argumento).

Puedo dar brevemente dos líneas de razonamiento para explicar nuestra inversión en los dibujos animados. Una es que la racionalidad de la práctica y el conocimiento de la enseñanza son por lo general tácitos y los dibujos son una manera de preguntar acerca de aquéllos sin tener que comprometer una representación simbólica (por ejemplo, sin tener que comprometer enunciados hechos en un vocabulario especializado). Esto surge de la manera como conceptualizamos la racionalidad de la práctica la que, de acuerdo con Bourdieu (1998), incluye categorías de percepción así como categorías de apreciación. Uno puede imaginarse que si no tuviéremos los dibujos y quisiéramos describir el enunciado de un problema de demostración a un maestro para luego hacerle una pregunta en un cuestionario, deberíamos de representar la situación y la acción con un lenguaje elegido por el investigador, el cual no necesariamente es el lenguaje de la práctica del maestro (pués tal lenguaje no existe—la enseñanza no tiene un vocabulario técnico que contenga las acciones matemáticamente importantes; véase Ball & Forzani, 2011). Una representación verbal abstracta de las decisiones de enseñanza pone más en peligro que una representación icónica nuestra capacidad de captar cuales son las categorías de percepción de los maestros. Los dibujos animados nos permiten mostrar la enseñanza en lugar de describirla.

La segunda línea de razonamiento es que la racionalidad de la práctica incluye no solo las consideraciones que subtienden lo real (lo que realmente ocurre en la práctica) sino tambien lo viable, lo concebible, y la diferencia entre aquéllos. Los problemas de decisión, en la medida que ellos representan decisiones que el maestro debe de tomar, nos requieren considerar lo que será elegido contra un trasfondo de posibilidades concebibles y tal vez también viables. La representación de esas alternativas requiere un lenguaje, pero la línea de razonamiento anterior sugiere que tal lenguaje puede beneficiarse de mantener componentes icónicas e indexicales en lugar de ser completamente transpuesto a un lenguaje simbólico. Esto nos deja dos posibilidades, el lenguaje de la actuación teatral y el lenguaje de los dibujos animados. Ambos son viables, y cada uno de ellos tienen ventajas sobre el otro. Nosotros hemos elegido trabajar con dibujos animados en lugar de actores pues los dibujos nos permiten no solamente la facilidad de crear escenas a muy bajo costo de producción sino también la posibilidad de pensar a este lenguaje de la acción constructivamente—en lugar de tomar como dato todos los elementos visuales en la acción humana, podemos tomar cada una de las posibilidades gráficas de diferenciación (por ejemplo, las maneras de representar distintos colores de piel o expresiones faciales) como pasibles de ser significantes, pero cuya significación en la representación de la enseñanza de las matemáticas pueden hipotetizada y estudiada empíricamente (Dimmel, Milewski, & Herbst, 2015) en lugar de darla por supuesta.

Referencias

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed), *Mathematics, teachers and children* (pp. *216*-235). London: Hodder Stoughton

Ball, D. L., & Forzani, F. M. (2011). Building a Common Core for learning to teach and connecting professional learning to practice. *American Educator*, *35*(2), 17-21, 38-39.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Boileau, N., Dimmel, J., & Herbst, P. (2016, November). Teachers' recognition of the diagrammatic register and its relationship with their mathematical knowledge for teaching. Paper presented at PME-NA, Tucson, AZ.

Boileau, N. & Herbst, P. (2015, November). *Teachers' Expectation About Geometric Calculations in High School Geometry*. Paper presented at PME-NA, East Lansing, MI.

Bourdieu, P. (1990). *The logic of practice*. Stanford, CA: Stanford University Press.

Bourdieu, P. (1998). *Practical reason: On the theory of action*. Stanford, CA: Stanford University Press.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des Mathematiques 1970-1990* (Ed. And Trans. By N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V.Warfield). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Bryk, A., Gomez, L., Grunow, A., & LeMahieu, P. (2015). *Learning to Improve: How America's Schools Can Get Better at Getting Better*. Cambridge, MA: Harvard.

Chazan, D. and Herbst, P. (2012). Animations of Classroom Interaction: Expanding the Boundaries of Video Records of Practice. *Teachers' College Record*, *114*(3)

Chazan, D., Herbst, P., and Clark, L. (2016). Research on the Teaching of Mathematics: A Call to Theorize the Role of Society and Schooling in Mathematics. In D. Gitomer and C. Bell (Eds.), *Handbook of research on teaching* (5th ed., pp. 1039-1097). Washington, DC: AERA.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseignée*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cohen, D. K., Raudenbush, S. W., & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *25*(2), 119-142.

Dimmel, J. & Herbst, P. (2015, November). *Investigating secondary mathematics teachers' attitudes toward alternative communication practices while doing proofs in geometry*. Paper presented at PME-NA, East Lansing, MI.

Dimmel, J. & Herbst, P. (2014, July). What details do geometry teachers expect in students' proofs? A method for experimentally testing possible classroom norms. Proceedings of the 2014 Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vancouver, BC: Simon Fraser University.

Dimmel, J., Milewski, A., & Herbst, P. (2015, April). Representing Professional Scenarios: Can nondescript cartoon graphics portray a range of human emotions? Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago.

Doxiadis, A., Papadimitriou, C. H., Papadatos, A., & Di Donna, A. (2010). *Logicomix: An epic search for truth*. New York: Bloomsbury.

Erickson, A. and Herbst, P. (2016, online first). Will teachers create opportunities for discussion when teaching proof in a geometry classroom? *International Journal of Mathematics and Science Education*.

Goffman, E. (1974). *Frame analysis: An essay on the organization of experience*. Boston: Northeastern University Press.

Herbst, P. (2003). Using novel tasks to teach mathematics: Three tensions affecting the work of the teacher. *American Educational Research Journal, 40,* 197-238.

Herbst, P. (2005). Knowing about "equal area" while proving a claim about equal areas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*, 11-56.

Herbst, P. (2006). Teaching geometry with problems: Negotiating instructional situations and mathematical tasks. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*, 313-347.

Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1,* 5-22.

Herbst, P., Aaron, W., and Chieu, V. M. (2013). Lesson*Sketch*: An Environment for Teachers to Examine Mathematical Practice and Learn about its Standards. In D. Polly (Ed.), *Common Core Mathematics Standards and Implementing Digital Technologies* (pp. 281-294). Hershey, PA: IGI Global.

Herbst, P. and Balacheff, N. (2009). Proving and Knowing in Public: What Counts as Proof in a Classroom In M. Blanton, D. Stylianou, and E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning of proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 40-63). New York: Routledge.

Herbst, P. & Chazan, D. (2012). On the instructional triangle and sources of justification for actions in mathematics teaching. *ZDM The International Journal of Mathematics Education, 44*(5), 601-612.

Herbst, P. and Chazan, D. (2015). Using Multimedia Scenarios Delivered Online to Study Professional Knowledge Use in Practice. *International Journal of Research and Method in Education,* 38(3), 272-287

Herbst, P., Chazan, D., Chieu, V. M., Milewski, A., Kosko, K., and Aaron, W. (2016). Technology-Mediated Mathematics Teacher Development: Research on Digital Pedagogies of Practice. In M. Niess, K. Hollebrands, & S. Driskell (Eds.), *Handbook of Research on Transforming Mathematics Teacher Education in the Digital Age* (pp. 78-106). Hershey, PA: IGI Global.

Herbst, P., Chazan, D., Kosko, K., Dimmel, J. and Erickson, A. (2016). Using multimedia questionnaires to study influences on the decisions mathematics teachers make in instructional situations. *ZDM The International Journal of Mathematics Education*, *48*, 167-183.

Herbst, P. Chen, C., Weiss, M., and González, G., with Nachlieli, T., Hamlin, M., and Brach, C. (2009). "Doing proofs" in geometry classrooms. In M. Blanton, D. Stylianou, and E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning of proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 250-268). New York: Routledge.

Herbst, P., Dimmel, J., Erickson, A., Ko, I., & Kosko, K. (2014, July). Mathematics teachers' recognition of an obligation to the discipline and its role in the justification of instructional actions. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allen (Eds.), *Proceedings of the 2014 annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 273-280). Vancouver, Canada: Simon Fraser University.

Herbst, P., & Kosko, K. (2014a). Mathematical knowledge for teaching and its specificity to high school geometry instruction. In J. Lo, K. R. Leatham, & L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 23-45). New York, NY: Springer.

Herbst, P. and Kosko, K. (2014b). Using Representations of Practice to Elicit Mathematics Teachers' Tacit Knowledge of Practice: A Comparison of Responses to Animations and Videos. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(6), 515-537

Herbst, P., Kosko, K., & Dimmel, J. (2013, November). *How are geometric proof problems presented? Conceptualizing and measuring teachers' recognition of the diagrammatic register.* In Martinez, M. & Castro Superfine, A (Eds.). Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 179-186). Chicago, IL: University of Illinois at Chicago.

Herbst, P., Nachlieli, T., and Chazan, D. (2011). Studying the practical rationality of mathematics teaching: What goes into "installing" a theorem in geometry? *Cognition and Instruction, 29*(2), 218-255.

Hsu, H. Y., & Silver, E. A. (2014). Cognitive complexity of mathematics instructional tasks in a Taiwanese classroom: An examination of task sources. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(4), 460-496.

Kilpatrick, J. (1990). Review: Apples and Oranges Again: Reviewed Works: The IEA Study of Mathematics I: Analysis of Mathematics Curricula by Kenneth J. Travers & Ian Westbury*;* The IEA Study of Mathematics II: Contexts and Outcomes of School Mathematics by David F. Robitaille & Robert A. Garden. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(5), 416-424.1

Manders, K. (2008). The Euclidean Diagram. In: Mancosu, P. (Ed.) *The Philosophy of Mathematical Practice* (pp. 80-133). Oxford: OUP. (Original work dated 1995)

Mehan, H., & Wood, H. (1975). *The reality of ethnomethodology*. Malabar, FL; Krieger.

Nachlieli, T. and Herbst, P. with González, G. (2009). Seeing a colleague encourage a student to make an assumption while proving: What teachers put to play in casting an episode of geometry instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(4), 427-459.

Ottaviani, J. & Purvis, L. (2016). *The imitation game: Alan Turing decoded*. New York: Abrams.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics Teachers. Beliefs and Affect. In F. K. Lester, Jr.(Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Publishing, 257-315.

Weiss, M., Herbst, P., and Chen, C. (2009). Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form. *Educational Studies in Mathematics*, 70 (3), 275-293.

Patricio Herbst (pgherbst@umich.edu)

610 East University Ave. #4215B

Ann Arbor, MI 48109-1259

Estados Unidos de Norteamérica