

# SUR LA STABILITÉ DES POINTS D'ÉQUILIBRE TRIANGULAIRES DANS LE PROBLÈME RESTREINT ELLIPTIQUE

N. X. VINH

*Dept. of Aerospace Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, Mich., U.S.A.*

(Received 8 February, 1972)

**Résumé.** La stabilité du mouvement d'un petit corps au voisinage des points triangulaires dans le problème restreint elliptique est discutée. Les courbes de stabilité dans le plan  $(\mu, e)$  sont obtenues jusqu'au quatrième ordre en  $e$  par la méthode du prolongement analytique. Les coefficients des séries obtenues sont donnés de façon exacte. Ensuite, les exposants caractéristiques du système des équations aux variations sont obtenus par un procédé d'intégration matricielle.

## 1. Introduction

Nous considérons dans ce papier un cas particulier du problème restreint des trois corps avec mouvements elliptiques des corps principaux. Il est bien connu que dans le problème des trois corps, il existe cinq configurations de Lagrange où les dispositions des trois corps sont telles que les rapports de leurs distances mutuelles restent invariables. Les points triangulaires  $L_4$  et  $L_5$  correspondent aux cas où les corps forment un triangle équilatéral. Dans le problème restreint elliptique, si nous écrivons les équations aux variations du mouvement du petit corps au voisinage du point  $L_4$ , dans un système des axes tournant tel que l'un des axes passe toujours par les corps principaux, nous avons

$$\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= \frac{3}{4}g(e, v) [\xi + \sqrt{3}(1 - 2\mu)\eta] \\ \eta'' + 2\xi' &= \frac{3}{4}g(e, v) [\sqrt{3}(1 - 2\mu)\xi + 3\eta] \end{aligned} \quad (1)$$

où

$$g(e, v) = \frac{1}{1 + e \cos v}. \quad (2)$$

Les dérivées sont prises par rapport à l'anomalie vraie  $v$ ,  $e$  est l'excentricité de l'orbite elliptique et le paramètre  $\mu$  est communément appelé le rapport des masses. Si nous effectuons une nouvelle rotation des axes définie par

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3)$$

où

$$\operatorname{tg} 2\psi = \sqrt{3}(1 - 2\mu) \quad (4)$$

nous avons le système

$$\begin{aligned} x'' - 2y' &= gh_1x \\ y'' + 2x' &= gh_2y \end{aligned} \quad (5)$$

avec

$$h_{1,2} = \frac{3}{2} [1 \mp \sqrt{1 - 3\mu(1 - \mu)}]. \quad (6)$$

La solution générale de ce système ne peut pas être obtenue sous forme finie. Grebenikov (1964) a proposé une méthode de construction de la solution par récurrence, suivant les puissances de  $e$ , des équations obtenues en prenant les valeurs moyennes des coefficients par rapport à l'anomalie vraie, tandis que Danby (1964) a intégré numériquement le système pour obtenir les courbes de transition qui délimitent les régions de stabilité dans le plan  $(\mu, e)$ . Les études numériques de Danby ont été reprises, et les résultats confirmés, par Bennett (1965). D'autre part, Alfriend et Rand (1968) ont donné des expressions analytiques pour les courbes de transition jusqu'au second ordre en  $e$  en intégrant les équations par la méthode des deux variables, et Nayfeh et Kamel ont donné les équations des courbes jusqu'au quatrième ordre (1970). Dans cette dernière étude, les auteurs ont parti d'une valeur numérique connue, arrêtée à un certain nombre de décimales. Donc, les coefficients numériques des séries qu'ils en ont déduit ne sont que approximatifs. Finalement, Deprit et Rom (1969), par un vrai tour de force, ont réussi à assembler un programme de calcul électronique qui permet de manipuler des expressions littérales pour fournir des expressions analytiques jusqu'au second ordre en  $e$ , pour les exposants caractéristiques du système (5). Ces exposants caractéristiques sont valables pour toutes les valeurs du rapport des masses plus petites que la valeur critique  $\mu_{(1)}$ , qui donne des fréquences normales égales, et pour des valeurs assez petites de  $e$ .

Dans ce papier, tout d'abord par la méthode du prolongement analytique de Poincaré, nous allons construire les équations des courbes de stabilité jusqu'au quatrième ordre en  $e$ , avec les coefficients des séries calculés d'une manière exacte. Ensuite, nous employons une méthode d'intégration matricielle pour calculer la solution fondamentale du système (5) pour des valeurs de  $\mu$  plus petites que  $\mu_{(1)}$  et pour des valeurs assez petites de  $e$ . Non seulement nous retrouvons les résultats littéraux de Deprit et Rom, mais en même temps nous arrangeons la procédure de telle façon qu'elle permet à ceux qui s'intéressent à ce problème de continuer les calculs pour obtenir les coefficients des développements littéraux des exposants caractéristiques jusqu'à n'importe quel ordre en  $e$ .

## 2. La courbe de transition émanant du point $\mu^*$

Dans les équations (5), si nous prenons  $e = 0$ , nous avons le cas où les corps principaux se meuvent sur des orbites circulaires. Les équations linéaires sont à coefficients constants et l'équation caractéristique s'écrit

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0. \quad (7)$$

Les racines de cette équation sont toutes imaginaires pour les valeurs du rapport des masses  $\mu$  plus petites que la valeur critique

$$\mu_{(1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{69}}{9}\right) = 0,038\,520\,896\dots \quad (8)$$

Pour cette valeur, les deux fréquences normales sont égales et les racines deviennent instables. De façon générale, il existe une suite de valeurs critiques pour  $\mu$  telle que le rapport des fréquences est un nombre entier  $k$ . Ces valeurs sont données par

$$\mu_{(k)} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{16k^2}{27(k^2 + 1)^2}} \right]. \quad (9)$$

Pour les équations linéaires à coefficients périodiques, il existe des résonances paramétriques où l'une des fréquences normales est dans un rapport entier avec la fréquence des coefficients périodiques qui, dans le cas du système (5), est égale à l'unité. Donc, nous cherchons le rapport des masses  $\mu^{(k)}$  tel que

$$\omega^2 = \frac{k^2}{4}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Ce qui nous donne, en tenant compte de l'équation (7)

$$\mu^{(k)} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{k^2(4 - k^2)}{27}} \right]. \quad (11)$$

Pour  $k=1$ , nous avons la valeur critique

$$\mu^* = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = 0,028\,595\,48 \dots \quad (12)$$

Les courbes de transition sont les courbes de résonance qui délimitent les régions de stabilité dans le plan  $(\mu, e)$ . Elles émanent des points de l'axe  $e=0$ , à partir des valeurs

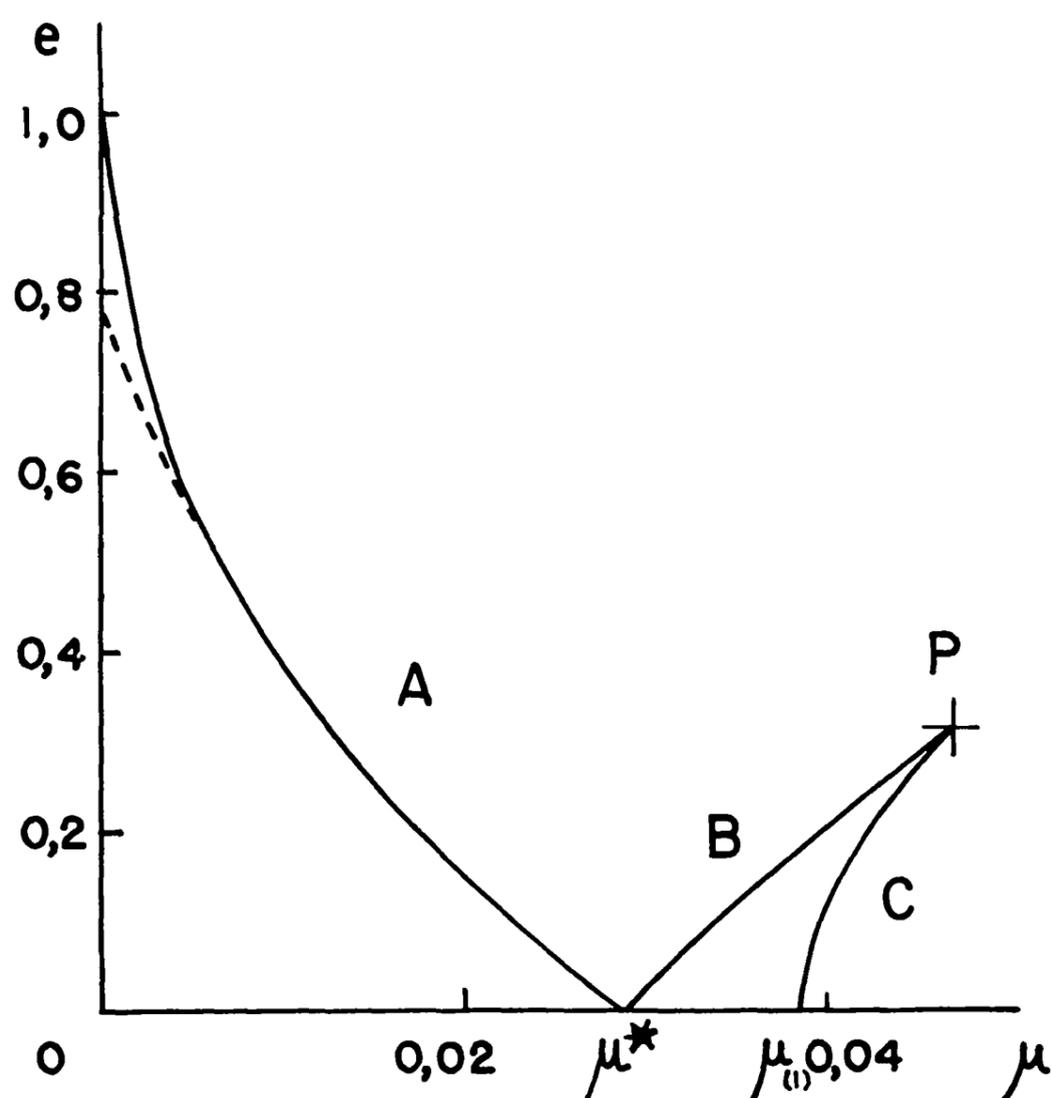


Fig. 1. Régions de stabilité des points triangulaires.

critiques de  $\mu$ . Les résultats des calculs numériques de Danby et de Bennett ont montré l'existence des courbes de transition émanant des points  $\mu^*$  et  $\mu_{(1)}$ . De  $\mu^*$  il existe deux branches de courbes distinctes  $A$  et  $B$  (Figure 1). Les deux branches émanant du point  $\mu_{(1)}$  sont coincident en une seule courbe  $C$  qui rencontre la branche  $B$  en un point  $P$  de coordonnées  $\mu=0,04698$ ,  $e=0,3143$ . Nous allons donner les développements exacts des équations de ces courbes en séries suivant les puissances de  $e$  jusqu'au quatrième ordre.

Considérons les équations aux variations (5). Supposons que les coefficients  $h_1$  et  $h_2$  peuvent être exprimés en des séries suivant les puissances de  $e$  le long des courbes de transition

$$\begin{aligned} h_1 &= a_0 + ea_1 + e^2a_2 + \dots \\ h_2 &= b_0 + eb_1 + e^2b_2 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

avec

$$b_i = -a_i, \quad \text{pour } i \geq 1. \quad (14)$$

Pour trouver l'équation de la courbe de transition émanant du point  $e=0$ ,  $\mu=\mu^*$ , il suffit de partir de ce point avec une solution du système (5), périodique et de période  $4\pi$ , et ensuite de faire un prolongement analytique de cette solution, valable pour des valeurs assez petites de  $e$ . Dans les équations (5), le développement de la fonction  $g(e, v)$  est simple. Il est donné par

$$g = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e \cos v)^n. \quad (15)$$

Cherchons les solutions périodiques du système (5) sous la forme des séries

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ex_1 + e^2x_2 + \dots \\ y &= y_0 + ey_1 + e^2y_2 + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

où les fonctions inconnues  $x_k$  et  $y_k$  sont périodiques et de période  $4\pi$ . En substituant les séries dans les équations (5) et en égalant les coefficients de même puissance de  $e$ , nous avons une suite des équations pour calculer les  $x_k$  et les  $y_k$  par récurrence. Nous avons

$$\begin{aligned} x_0'' - 2y_0' - a_0x_0 &= 0 \\ y_0'' + 2x_0' - b_0y_0 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} x_1'' - 2y_1' - a_0x_1 &= (a_1 - a_0 \cos v) x_0 \\ y_1'' + 2x_1' - b_0y_1 &= (b_1 - b_0 \cos v) y_0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x_2'' - 2y_2' - a_0x_2 &= (a_2 - a_1 \cos v + a_0 \cos^2 v) x_0 + (a_1 - a_0 \cos v) x_1 \\ y_2'' + 2x_2' - b_0y_2 &= (b_2 - b_1 \cos v + b_0 \cos^2 v) y_0 + (b_1 - b_0 \cos v) y_1 \end{aligned} \quad (19)$$

etc...

Considérons la solution paire, en cosinus, pour  $x_0$

$$x_0 = \cos v/2. \quad (20)$$

Nous prenons la convention que le coefficient de  $\cos v/2$  dans la solution (16) pour  $x$

soit égal à l'unité. De la première équation (17), nous avons pour  $y_0$

$$y_0 = - (a_0 + \frac{1}{4}) \sin v/2. \quad (21)$$

Pour satisfaire à la deuxième équation (17), il faut et il suffit que

$$(a_0 + \frac{1}{4}) (b_0 + \frac{1}{4}) = 1. \quad (22)$$

Posons

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{4}, \quad \beta = b_0 + \frac{1}{4}. \quad (23)$$

Par les équations (6), (13) et (22) les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  satisfont à

$$\alpha + \beta = \frac{7}{2}, \quad \alpha\beta = 1. \quad (24)$$

Donc

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 &= 7\alpha - 2, & 2\beta^2 &= 7\beta - 2 \\ \alpha &= \frac{7 - \sqrt{33}}{4}, & \beta &= \frac{7 + \sqrt{33}}{4}. \end{aligned} \quad (25)$$

Nous voyons que les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , et par conséquence  $a_0$  et  $b_0$  sont connus numériquement; mais nous nous contentons de les considérer comme des paramètres littéraux et nous nous servons des relations (24) et (25) seulement pour simplifier les coefficients obtenus en fonction de ces paramètres. Nous avons donc

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \tau, & \tau &= v/2. \\ y_0 &= -\alpha \sin \tau \end{aligned} \quad (26)$$

Avec ces solutions, les équations pour  $x_1$  et  $y_1$  s'écrivent avec la nouvelle variable  $\tau$

$$D^2 x_1 - 4Dy_1 - (4\alpha - 1) x_1 = (4\alpha_1 - 2\alpha + \frac{1}{2}) \cos \tau - \frac{(4\alpha - 1)}{2} \cos 3\tau \quad (27)$$

$$D^2 y_1 + 4Dx_1 - (4\beta - 1) y_1 = \left(4a_1\alpha - 2 + \frac{\alpha}{2}\right) \sin \tau + \frac{(4 - \alpha)}{2} \sin 3\tau$$

où  $D = d/d\tau$ . De façon générale, considérons un des systèmes des équations

$$\begin{aligned} [D^2 - (4\alpha - 1)] x_i - 4Dy_i &= a \cos \tau & + \text{différentes harmoniques} \\ 4Dx_i + [D^2 - (4\beta - 1)] y_i &= b \sin \tau & + \text{différentes harmoniques.} \end{aligned} \quad (28)$$

En éliminant  $y_i$  et en se servant des relations entre  $\alpha$  et  $\beta$

$$(D^4 + 4D^2 + 3) x_i = 4(b - \beta a) \cos \tau + \text{différentes harmoniques.} \quad (29)$$

Comme l'équation sans second membre a la solution  $\cos \tau$ , pour éliminer les termes séculaires dans la solution pour  $x_i$ , il faut prendre

$$a = \frac{1}{\beta} b = \alpha b. \quad (30)$$

Si nous appliquons cette condition à l'équation (27) nous avons

$$a_1 = -\frac{1}{8}, \quad b_1 = \frac{1}{8}. \quad (31)$$

Il se trouve que les coefficients  $a_i$ , quand  $i$  est nombre impair, sont des fractions rationnelles, et quand  $i$  est nombre pair différent de zéro, le coefficient  $a_i$  est égal à une fraction rationnelle multipliée par le facteur  $1/(\beta - \alpha)$ . Ce qui nous donne un moyen excellent pour vérifier les coefficients trouvés à chaque étape d'intégration.

Avec les solutions (26) pour  $x_0$  et  $y_0$ , et la valeur trouvée pour  $a_1$ , l'intégration du système différentiel (27) nous donne

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{16} (4\alpha + 7) \cos 3\tau \\ y_1 &= \frac{1}{2}\alpha \sin \tau - \frac{1}{16} (7\alpha + 4) \sin 3\tau. \end{aligned} \quad (32)$$

Il est inutile de donner les détails des calculs et nous nous contentons de présenter les résultats suivants

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{23}{256(\beta - \alpha)}, & b_2 &= -\frac{23}{256(\beta - \alpha)} \\ a_3 &= \frac{105}{2048}, & b_3 &= -\frac{105}{2048} \\ a_4 &= -\frac{148859}{2162688(\beta - \alpha)}, & b_4 &= \frac{148859}{2162688(\beta - \alpha)} \end{aligned} \quad (33)$$

et

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{(40\alpha + 1)}{256} \cos 3\tau + \frac{(152\alpha + 97)}{2816} \cos 5\tau \\ y_2 &= \frac{(155\alpha - 164)}{1056} \sin \tau + \frac{(55\alpha - 8)}{256} \sin 3\tau - \frac{(97\alpha + 152)}{2816} \sin 5\tau \\ x_3 &= \frac{(2136\alpha - 989)}{8192(\beta - \alpha)} \cos 3\tau + \frac{3(632\alpha - 281)}{22528(\beta - \alpha)} \cos 5\tau + \frac{5(80\alpha - 59)}{16384(\beta - \alpha)} \cos 7\tau \\ y_3 &= \frac{(629\alpha - 172)}{1024(\beta - \alpha)} \sin \tau + \frac{(1304 - 2541\alpha)}{8192(\beta - \alpha)} \sin 3\tau + \\ &\quad + \frac{3(336 - 577\alpha)}{22528(\beta - \alpha)} \sin 5\tau + \frac{5(80 - 59\alpha)}{16384(\beta - \alpha)} \sin 7\tau. \end{aligned} \quad (34)$$

Maintenant, pour avoir l'équation de la courbe de transition émanant du point  $\mu^*$ , formons le produit  $4h_1h_2$ . Nous avons

$$27\mu(1 - \mu) = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4} e + \frac{19}{64} e^2 + \frac{3649\sqrt{33}}{33792} e^3 - \frac{41085}{180224} e^4 + \dots \quad (35)$$

C'est le développement exact de l'équation de la branche de courbe  $A$  de la Figure 1. D'une manière explicite, posons jusqu'à l'ordre de  $e^4$  pour la branche de courbe  $A$

$$\mu_A = \mu_0 + \mu_1 e + \mu_2 e^2 + \mu_3 e^3 + \mu_4 e^4 + \dots \quad (36)$$

En substituant cette série dans l'équation (35) et en égalant les coefficients de même puissance de  $e$  pour évaluer les  $\mu_i$  nous avons

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \mu^* \\ \mu_1 &= -\frac{\sqrt{66}}{144} \\ \mu_2 &= \frac{49\sqrt{2}}{4608} \\ \mu_3 &= \frac{751\sqrt{66}}{270336} \\ \mu_4 &= -\frac{114275\sqrt{2}}{14155776}.\end{aligned}\tag{37}$$

Si nous prenons comme solutions génératrices

$$\begin{aligned}x_0 &= \sin \tau \\ y_0 &= \alpha \cos \tau\end{aligned}\tag{38}$$

en effectuant de la même manière, nous obtenons le développement exact de l'équation de la branche de courbe  $B$  émanant du point  $\mu^*$

$$\mu_B = \mu_A(-e).\tag{39}$$

### 3. La courbe de transition émanant du point $\mu_{(1)}$

Prenons comme la solution génératrice, la solution périodique qui donne pour  $e=0$  des fréquences normales égales  $\omega_1 = \omega_2$ . Par l'équation (7) nous voyons que  $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 1$ . Donc

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \omega.\tag{40}$$

De nouveau, nous calculerons les valeurs numériques des coefficients des développements en séries des solutions seulement vers la fin, et nous nous contenterons, pour les intégrations successives, d'utiliser un paramètre littéral qui, bien entendu, représente une valeur numérique bien déterminée. Considérons la solution paire, génératrice

$$x_0 = \cos \tau, \quad \tau = \omega v\tag{41}$$

où  $\tau$  est la nouvelle variable indépendante. Avec cette solution, la première équation (17) donne

$$y_0 = -\frac{(a_0 + \omega^2)}{2\omega} \sin \tau.\tag{42}$$

Pour satisfaire la deuxième équation (17) nous devons avoir la relation

$$\frac{(a_0 + \omega^2)(b_0 + \omega^2)}{2\omega} = 1. \quad (43)$$

Posons donc

$$\alpha = \frac{a_0 + \omega^2}{2\omega}, \quad \beta = \frac{b_0 + \omega^2}{2\omega}. \quad (44)$$

Avec la condition (43) et la définition de  $a_0$  et  $b_0$  nous voyons que

$$\alpha + \beta = 2\sqrt{2}, \quad \alpha\beta = 1. \quad (45)$$

Nous vérifions aussi que

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{2} - 1, & 2a_0 &= \alpha^2 = 1 - 2\alpha, & \beta - \alpha &= 2 \\ \beta &= \sqrt{2} + 1, & 2b_0 &= \beta^2 = 5 + 2\alpha, & 2\omega &= \alpha + 1 = \beta - 1. \end{aligned} \quad (46)$$

Ces relations nous permettent d'exprimer les coefficients des développements en fonction des paramètres  $\alpha$  ou  $\omega$ . Comme auparavant, les étapes d'intégration successive se conduisent aisément et nous avons comme résultat

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 = \dots = 0, & b_1 &= b_3 = \dots = 0 \\ a_2 &= \frac{\alpha + 1}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8}, & b_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{8} \\ a_4 &= -\frac{101(\alpha + 1)}{256} = -\frac{101\sqrt{2}}{256}, & b_4 &= \frac{101\sqrt{2}}{256}. \end{aligned} \quad (47)$$

Le long de la courbe de transition émanant du point  $\mu_{(1)}$ , nous avons les solutions paires pour les  $x_i$  et impaires pour les  $y_i$

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \omega v \\ y_0 &= -\alpha \sin \omega v \\ x_1 &= -\frac{(3\alpha + 4)}{4} \cos(1 - \omega)v + \frac{(2 - \alpha)}{4} \cos(1 + \omega)v \\ y_1 &= \frac{(2\alpha + 1)}{4} \sin(1 - \omega)v + \frac{(4\alpha - 3)}{4} \sin(1 + \omega)v \\ x_2 &= -\frac{(23\alpha + 51)}{64} \cos(2 - \omega)v - \frac{3(11\alpha - 5)}{64} \cos(2 + \omega)v \\ y_2 &= \frac{5(\alpha - 1)}{16} \sin \omega v + \frac{3(5\alpha + 11)}{64} \sin(2 - \omega)v + \\ &\quad + \frac{(51\alpha - 23)}{64} \sin(2 + \omega)v \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{(367\alpha + 805)}{256} \cos(1 - \omega) v + \frac{(153\alpha - 53)}{256} \cos(1 + \omega) v - \\
&\quad - \frac{(257\alpha + 671)}{5376} \cos(3 - \omega) v - \frac{(775\alpha - 311)}{5376} \cos(3 + \omega) v \\
y_3 &= - \frac{(73\alpha + 93)}{256} \sin(1 - \omega) v - \frac{9(105\alpha - 43)}{256} \sin(1 + \omega) v + \\
&\quad + \frac{(311\alpha + 775)}{5376} \sin(3 - \omega) v + \frac{(671\alpha - 257)}{5376} \sin(3 + \omega) v.
\end{aligned}$$

Pour avoir l'équation de la courbe de transition émanant du point  $\mu_{(1)}$ , formons le produit  $4h_1h_2$ . Nous avons, jusqu'à l'ordre de  $e^5$  inclus, et avec des coefficients exacts, l'équation très simple suivante de la courbe

$$27\mu(1 - \mu) = 1 + 2e^2 - \frac{103}{16}e^4 + O(e^6). \quad (49)$$

D'une manière explicite

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \left[ 1 - \frac{4}{23} e^2 + \frac{2305}{4232} e^4 + O(e^6) \right]. \quad (50)$$

Si nous prenons la solution impaire pour  $x_0$  comme la solution génératrice, nous obtenons la même courbe. Les résultats de l'étude analytique sont donnés en ligne pointillée sur la Figure 1.

#### 4. Système d'équations linéaires à coefficients périodiques

Les solutions obtenues auparavant ne sont que des solutions périodiques particulières le long des courbes de transition. Elles ne sont que des cas particuliers de la solution générale du système (5). D'une manière plus générale, nous considérons le système

$$\dot{x} = [A + \varepsilon B(t, \varepsilon)] x \quad (51)$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est un vecteur à  $n$  dimensions, fonction de  $t$ ,  $A$  une matrice constante de  $n$  lignes et  $n$  colonnes,  $B(t, \varepsilon)$  une matrice carrée du même ordre, périodique en  $t$  avec la période  $T$ , et  $\varepsilon$  un paramètre très petit. Il existe plusieurs méthodes de construction des solutions approchées des systèmes de ce genre. Celle de Cesari (1941) est appliquée à l'équation du type  $\dot{x} = [A + \varepsilon B(t)] \dot{x}$ , tandis que celle de Coakley (1967) donne la solution fondamentale approchée de l'équation  $\dot{x} = \varepsilon B(t, \varepsilon) x$ . Nous allons donner une méthode d'intégration de l'équation (51) qui est plus générale. Notre méthode est basée sur la possibilité d'une construction de la matrice exponentielle  $e^{At}$  sous forme finie.

Par la théorie de Floquet, on sait que la solution fondamentale de (51) a la forme

$$X(t, \varepsilon) = P(t, \varepsilon) e^{D(\varepsilon)t} \quad (52)$$

où  $P(t, \varepsilon)$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ , périodique en  $t$  avec la même période  $T$  que  $B$ , et  $D(\varepsilon)$  une matrice carrée, constante, d'ordre  $n$ . Comme pour  $\varepsilon=0$ , nous avons  $X(t, 0)=e^{At}$ , nous posons pour  $D$  et  $P$

$$D = A + \varepsilon C(\varepsilon) \quad (53)$$

et

$$P = I + \varepsilon U(t, \varepsilon). \quad (54)$$

En substituant (52)–(54) dans (51), considérée comme une équation matricielle, nous avons, après avoir simplifié par le facteur commun  $\varepsilon$ , l'équation en  $U$

$$\dot{U} = AU - UA + B - C + \varepsilon(BU - UC). \quad (55)$$

Il nous faut déterminer la matrice constante  $C$  et la fonction  $U$ , périodique en  $t$ , avec période  $T$ . En étudiant l'équation (55), nous considérons l'équation associée

$$\dot{U} = AU - UA + Q(t) \quad (56)$$

où  $Q(t)$  est une matrice, périodique en  $t$  et de période  $T$ . Nous faisons le changement de variable

$$U = e^{At} Z e^{-At}. \quad (57)$$

L'équation (56) devient

$$\dot{Z} = e^{-At} Q(t) e^{At}. \quad (58)$$

Si  $Q(t)$  est donnée, nous obtenons  $Z$  par une simple quadrature

$$Z = \int e^{-At} Q(t) e^{At} dt + K \quad (59)$$

où  $K$  est une matrice constante. Nous avons ensuite pour  $U$

$$U(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} Q(s) e^{-A(t-s)} ds + e^{At} K e^{-At}. \quad (60)$$

Maintenant nous imposons à  $U(t)$  la condition de périodicité de période  $T$ . Il est clair que nous devons tout d'abord prendre  $K=0$ . En plus, il faut que la fonction à intégrer soit démunie du terme constant. Nous définissons l'opérateur des valeurs moyennes  $M$  par

$$MQ(t) = \frac{1}{T} \int_{-(T/2)}^{T/2} Q(t) dt. \quad (61)$$

Nous voyons que, pour rendre  $U(t)$  périodique en  $t$  et de période  $T$ , il nous faut en plus que la condition  $K=0$ , avoir la condition

$$MQ = 0. \quad (62)$$

Dans l'équation (55) considérée, prenons

$$Q = B - C + \varepsilon(BU - UC). \quad (63)$$

Comme  $C$  est une constante,  $MC = C$ , et la condition (62) devient

$$C = M [B + \varepsilon (BU - UC)]. \quad (64)$$

Avec  $K=0$ , et la fonction  $Q(t)$  définie par (63) nous écrivons la solution pour  $U(t)$

$$U(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} [B - C + \varepsilon (BU - UC)] e^{-A(t-s)} ds. \quad (65)$$

En remplaçant  $C$  par son expression donnée par (64)

$$U(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} (1 - M) [B + \varepsilon (BU - UC)] e^{-A(t-s)} ds. \quad (66)$$

Si nous définissons l'opérateur intégral  $N$  par la formule

$$NQ(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} (1 - M) Q(s) e^{-A(t-s)} ds \quad (67)$$

nous pouvons finalement écrire les solutions pour  $C$  et  $U$  sous la forme opérationnelle

$$\begin{aligned} C &= M [B + \varepsilon (BU - UC)] \\ U &= N [B + \varepsilon (BU - UC)]. \end{aligned} \quad (68)$$

Cette forme se présente très convenablement quand il s'agit d'une construction des solutions par récurrence. Supposons que  $C$  et  $U$  peuvent être exprimées sous forme des séries convergentes pour des valeurs assez petites de  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} C &= C_0 + \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \dots \\ U &= U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots \end{aligned} \quad (69)$$

Soit aussi le développement de la fonction  $B(t, \varepsilon)$

$$B = B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots \quad (70)$$

Les fonctions  $B_i(t)$  sont des matrices carrées d'ordre  $n$ , périodiques en  $t$  et de période  $T$ . Si nous substituons ces séries dans le système (68) et ensuite égalons les coefficients de même puissance en  $\varepsilon$ , nous obtenons les systèmes de récurrence suivants pour calculer les matrices  $C_i$  et  $U_i$

$$\begin{aligned} C_0 &= M [B_0] \\ C_1 &= M [B_1 + B_0 U_0 - U_0 C_0] \\ &\dots \\ C_i &= M [B_i + B_0 U_{i-1} + \dots - U_{i-1} C_0] \end{aligned} \quad (71)$$

et

$$\begin{aligned} U_0 &= N [B_0] \\ U_1 &= N [B_1 + B_0 U_0 - U_0 C_0] \\ &\dots \\ U_i &= N [B_i + B_0 U_{i-1} + \dots - U_{i-1} C_0]. \end{aligned} \quad (72)$$

### 5. Les exposants caractéristiques au voisinage du point $L_4$

Nous pouvons maintenant appliquer la méthode précédente à l'intégration du système (5). Posons

$$\begin{aligned} x &= x_1, & y &= x_2, & x' &= x_3, & y' &= x_4 \\ X &= (x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned} \quad (73)$$

Nous écrivons le système

$$X' = [A + eB(e, v)] X \quad (74)$$

avec

$$\begin{aligned} B(e, v) &= B_0 + eB_1 + e^2B_2 + e^3B_3 + \dots \\ &= \varphi_0(v) B + e\varphi_1(v) B + e^2\varphi_2(v) B + e^3\varphi_3(v) B + \dots. \end{aligned} \quad (75)$$

$A$  et  $B$  sont des matrices constantes de 4 lignes et 4 colonnes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & h_2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (76)$$

Les fonctions trigonométriques  $\varphi_i(v)$  sont données par

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= -\cos v \\ \varphi_1 &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2v) \\ \varphi_2 &= -\frac{1}{4}(3 \cos v + \cos 3v) \\ \varphi_3 &= \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2v + \cos 4v). \end{aligned} \quad (77)$$

Nous cherchons la solution fondamentale de l'équation (74) sous la forme

$$X = (I + eU) e^{(A+eC)v} \quad (78)$$

où la matrice constante  $C$  et la fonction matricielle  $U$  sont données par les séries

$$\begin{aligned} C &= C_0 + eC_1 + e^2C_2 + \dots \\ U &= U_0 + eU_1 + e^2U_2 + \dots. \end{aligned} \quad (79)$$

Les  $C_i$  et  $U_i$  sont alors obtenues par les formules (71) et (72). Nous observons que, pour appliquer ces formules, par la définition (67) de l'opérateur intégral  $N$ , il nous faut calculer la matrice exponentielle  $e^{At}$ . Nous employons le lemme suivant:

*Lemme:* (Vinh, 1972). Quand les racines caractéristiques  $\lambda_i$  de la matrice constante de  $n$  lignes et  $n$  colonnes  $A$  sont toutes distinctes, la matrice exponentielle  $e^{At}$  est donnée par

$$e^{At} = \sum_{i=1}^n \frac{p_i(A)}{p_i(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}$$

où

$$p_i(\lambda) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda - \lambda_j).$$

Dans notre cas, l'équation caractéristique de  $A$  est donnée par (7) et nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm i\omega_1, & \lambda_{3,4} &= \pm i\omega_2 \\ \omega_1^2 &= \frac{1}{2} [1 + \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}] \\ \omega_2^2 &= \frac{1}{2} [1 - \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}]. \end{aligned} \quad (80)$$

Au lieu d'effectuer les calculs avec le paramètre  $\mu$ , il est plus simple d'utiliser les paramètres symétriques  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , ou  $h_1$  et  $h_2$ . On peut aisément vérifier les relations suivantes

$$\begin{aligned} \omega_1^2 + \omega_2^2 &= 1, & h_1 + h_2 &= 3 \\ \omega_1^2 \omega_2^2 &= h_1 h_2 = \frac{27}{4} \mu (1 - \mu). \end{aligned} \quad (81)$$

En employant notre lemme, nous avons

$$e^{Av} = A_1 e^{i\omega_1 v} + A_2 e^{-i\omega_1 v} + A_3 e^{i\omega_2 v} + A_4 e^{-i\omega_2 v} \quad (82)$$

où

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \frac{1}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \left( -\omega_2^2 I \pm i \frac{\omega_2^2}{\omega_1} A - A^2 \pm \frac{i}{\omega_1} A^3 \right) \\ A_{3,4} &= \frac{1}{2(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left( -\omega_1^2 I \pm i \frac{\omega_1^2}{\omega_2} A - A^2 \pm \frac{i}{\omega_2} A^3 \right). \end{aligned} \quad (83)$$

Par la définition de l'opérateur intégral  $N$ , nous observons que les intégrales à effectuer sont de la forme

$$\int_0^v e^{A(v-s)} D e^{-A(v-s)} \begin{cases} \cos ms \\ \sin ms \end{cases} ds$$

où  $D$  est une matrice constante et  $m$  un nombre entier positif. Donc, nous pouvons effectuer les intégrations une seule fois pour toutes, et nous pouvons écrire le résultat sous la forme

$$\int_0^v e^{A(v-s)} D e^{-A(v-s)} \begin{cases} \cos ms \\ \sin ms \end{cases} ds = -\frac{\sin mv}{\cos mv} P_m(D) + \frac{\cos mv}{\sin mv} Q_m(D) \quad (84)$$

où les coefficients  $P_m(D)$  et  $Q_m(D)$  sont donnés par

$$\begin{aligned} m(m^2 - 4\omega_1^2)(m^2 - 4\omega_2^2) [(m^2 - 1)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2] P_m(D) &= \\ &= [m^2(m^2 - 1)^2(m^2 - 4) + 2m^2(5m^2 - 3)\omega_1^2 \omega_2^2 + \\ &+ 8\omega_1^2 \omega_2^2(1 - 2\omega_1^2 \omega_2^2)] D + 2[(m^2 - 1)^2(m^2 - 4) + \\ &+ 6(m^2 + 2)\omega_1^2 \omega_2^2] D_3 + 2[3m^2(m^2 - 1) + 8\omega_1^2 \omega_2^2] AD_3 A + \\ &+ 4(5m^2 - 2) A^2 D_3 A^2 - [m^2(m^2 - 1)(m^2 - 4) - 4(m^2 + 2)\omega_1^2 \omega_2^2] \times \\ &\times (AD_1 + D_2 A) - 2[(2m^2 - 1)(m^2 - 4) - 8\omega_1^2 \omega_2^2] (A^2 D_3 + D_3 A^2) \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned}
(m^2 - 4\omega_1^2)(m^2 - 4\omega_2^2) [(m^2 - 1)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2] Q_m(D) = \\
= 2(2 - 5m^2) A^2 (D_1 - D_2) A^2 - \\
- [(m^2 - 1)^2 (m^2 - 4) + 6(m^2 + 2) \omega_1^2\omega_2^2] (D_1 - D_2) + \\
+ [(m^2 - 1)(m^2 - 4) - 24\omega_1^2\omega_2^2] (A^2 D_1 - D_2 A^2) + \\
+ [(3m^2 - 1)(m^2 - 4) + 8\omega_1^2\omega_2^2] (D_1 A^2 - A^2 D_2).
\end{aligned}$$

Dans les formules précédentes, nous avons défini

$$D_1 = AD, \quad D_2 = DA, \quad D_3 = ADA. \quad (86)$$

Comme les intégrations ont été effectuées, la solution par notre méthode s'obtient par des multiplications des matrices  $A$  et  $B$ . L'application de la méthode est encore rendue plus simple par les observations suivantes:

Les matrices  $A$  et  $B$  peuvent être subdivisées en des sous-matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ a & 2J \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \quad (87)$$

où

$$a = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (88)$$

et  $I$  est la matrice unité. Donc, les opérations se comportent comme des multiplications des  $2 \times 2$  matrices ayant des éléments qui sont des fonctions de  $a$  et  $J$ . Ces sous-matrices ont leurs produits qui satisfont des relations intéressantes. Tout d'abord, comme  $a$  est une matrice diagonale nous avons simplement

$$a^n = \begin{bmatrix} h_1^n & 0 \\ 0 & h_2^n \end{bmatrix}. \quad (89)$$

Ensuite, on vérifie que

$$J^2 = -I, \quad J^3 = -J, \quad J^4 = I, \quad \text{etc} \dots \quad (90)$$

Formons les produits

$$aJ = \begin{bmatrix} 0 & h_1 \\ -h_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad Ja = \begin{bmatrix} 0 & h_2 \\ -h_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
aJ + Ja &= (h_1 + h_2) J \\
a^2J + Ja^2 &= (h_1^2 + h_2^2) J \\
\dots & \\
a^n J + Ja^n &= (h_1^n + h_2^n) J.
\end{aligned} \quad (91)$$

Maintenant si nous multiplions la première équation (91) par la gauche par  $J$

$$JaJ + J^2a = (h_1 + h_2) J^2.$$

En employant (90)

$$\begin{aligned} JaJ &= a - (h_1 + h_2) I \\ Ja^2J &= a^2 - (h_1^2 + h_2^2) I \\ \dots \\ Ja^nJ &= a^n - (h_1^n + h_2^n) I. \end{aligned} \quad (92)$$

Si nous multiplions la première équation (91) par la droite par  $a$ , nous avons

$$aJa + Ja^2 = (h_1 + h_2) Ja.$$

Multiplions la même équation par la gauche par  $a$

$$aJa + a^2J = (h_1 + h_2) aJ.$$

En additionnant les deux équations

$$2aJa + (a^2J + Ja^2) = (h_1 + h_2) (aJ + Ja).$$

En appliquant les formules (91)

$$\begin{aligned} aJa &= h_1 h_2 J \\ a^2Ja^2 &= h_1^2 h_2^2 J \\ \dots \\ a^nJa^n &= h_1^n h_2^n J. \end{aligned} \quad (93)$$

Finalement, par la définition (88) de  $a$ , les racines caractéristiques de cette matrice sont  $h_1$  et  $h_2$ . Comme  $h_1 + h_2 = 3$ , par le théorème de Cayley-Hamilton

$$a^2 - 3a + h_1 h_2 I = 0. \quad (94)$$

Les relations entre les matrices  $a$  et  $J$  que nous avons mises en œuvre permettent de simplifier la construction de la solution fondamentale du système considéré. De façon générale, après chaque étape d'intégration, on peut toujours ramener les sous-matrices qui sont les éléments des matrices constantes  $C_i$  et des coefficients  $P_m$  et  $Q_m$  sous les formes  $(\alpha a + \beta I)$  et  $(\gamma aJ + \delta J)$  où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  sont des coefficients algébriques fonctions de  $h_1$  et  $h_2$ , c'est à dire de  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

Jusqu'au second ordre en  $e$ , la solution est obtenue presque immédiatement. À partir des équations de récurrence (71) et (72) nous avons pour  $C_0$

$$C_0 = M[B_0] = -M[B \cos v] = 0 \quad (95)$$

et pour  $U_0$

$$U_0 = N[B_0] = -P_1(B) \sin v - Q_1(B) \cos v \quad (96)$$

où  $P_1(B)$  et  $Q_1(B)$  sont données par les formules (85) et (86) avec  $m=1$ ,  $D=B$ . Calculons ensuite  $C_1$

$$\begin{aligned} C_1 &= M[B_1 + B_0 U_0 - U_0 C_0] = \\ &= M\left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2v) B + \cos v B [P_1(B) \sin v + Q_1(B) \cos v]\right] \end{aligned}$$

ou

$$C_1 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}BQ_1(B). \quad (97)$$

Continuons de la même manière et nous avons jusqu'à l'ordre de  $e^4$

$$C_2 = 0 \quad (98)$$

et

$$C_3 = \frac{3}{4}C_1 + \frac{1}{4}BQ_2(C_1) - \frac{1}{4}BP_2(\bar{C}_1) - \frac{1}{2}BQ_1(K_1) + \frac{1}{2}BP_1(\bar{K}_1) \quad (99)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= \frac{1}{2}BP_1(B) \\ K_1 &= -\frac{3}{2}C_1 - \frac{1}{2}BQ_2(C_1) + \frac{1}{2}BP_2(\bar{C}_1) + Q_1(B)C_1 \\ \bar{K}_1 &= -\frac{1}{2}\bar{C}_1 - \frac{1}{2}BP_2(C_1) - \frac{1}{2}BQ_2(\bar{C}_1) + P_1(B)C_1. \end{aligned} \quad (100)$$

Ces multiplications des matrices sont rendues simples avec l'aide des relations trouvées pour les produits des matrices  $a$  et  $J$ . D'une manière explicite, nous avons

$$C_1 = \frac{1}{2(1-4\omega_1^2)(1-4\omega_2^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 12(\omega_1^2\omega_2^2-2)a + 9\omega_1^2\omega_2^2I & 8\omega_1^2\omega_2^2J - 12aJ \end{bmatrix}. \quad (101)$$

Jusqu'au second ordre en  $e$ , la matrice constante dans l'exposant de la solution fondamentale est de

$$A + e^2C_1. \quad (102)$$

Nous avons donc l'équation caractéristique de cette matrice

$$\begin{aligned} \lambda^4 + \left[ 1 - \frac{11\omega_1^2\omega_2^2}{(1-4\omega_1^2)(1-4\omega_2^2)} e^2 + O(e^4) \right] \lambda^2 + \\ + \omega_1^2\omega_2^2 \left[ 1 + \frac{3(8\omega_1^2\omega_2^2-7)}{2(1-4\omega_1^2)(1-4\omega_2^2)} e^2 + O(e^4) \right] = 0. \end{aligned} \quad (103)$$

En posant  $\lambda^2 = -\sigma^2$ , nous avons les fréquences normales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  données par

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \omega_1^2 + \frac{\omega_1^2(1-\omega_1^2)(6\omega_1^2-7)}{2(1-4\omega_1^2)(2\omega_1^2-1)} e^2 + O(e^4) \\ \sigma_2^2 &= \omega_2^2 + \frac{\omega_2^2(1-\omega_2^2)(6\omega_2^2-7)}{2(1-4\omega_2^2)(2\omega_2^2-1)} e^2 + O(e^4). \end{aligned} \quad (104)$$

Nous retrouvons donc les résultats donnés par le programme de calcul électronique de Deprit et Rom (1969)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \omega_1 \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{(1-\omega_1^2)(7-6\omega_1^2)}{(1-2\omega_1^2)(1-4\omega_1^2)} e^2 + O(e^4) \right] \\ \sigma_2 &= \omega_2 \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{(1-\omega_2^2)(7-6\omega_2^2)}{(1-2\omega_2^2)(1-4\omega_2^2)} e^2 + O(e^4) \right]. \end{aligned} \quad (105)$$

Pour terminer nous voudrions mentionner que, avec notre procédure d'intégration matricielle, non seulement nous pouvons construire la solution fondamentale donnée par la théorie de Floquet, mais comme l'intégration est effectuée une seule fois pour

toutes, à l'aide des relations simplificatrices pour les produits des matrices fondamentales  $a$  et  $J$ , nous pouvons aisément continuer le calcul jusqu'à n'importe quel ordre en  $e$  que l'on désire.

### Remerciements

L'auteur a voulu exprimer sa reconnaissance envers Monsieur Le Professeur Yves Thiry de la Faculté des Sciences de Paris pour ses conseils bienveillants, et aussi envers Monsieur Le Professeur André Deprit pour les documents très utiles sur le problème restreint elliptique qu'il a reçu de sa part.

### Références

- Alfriend, K. T. et Rand, R. M.: 1968, 'The Stability of the Triangular Points in the Elliptic Restricted Problem of Three Bodies', AIAA paper No. 68-090.
- Bennett, A.: 1965, *Icarus* **4**, 177-187.
- Cesári, L.: 1941, *Mem. Acad. Italia* **11**, 633-695.
- Coakley, T. J.: 1967, 'Perturbation and Iteration Methods for the Diagonalization of Matrices', Report, University of Colorado.
- Danby, J. M. A.: 1964, *Astron. J.* **69**, 165-172.
- Deprit, A. et Rom, A.: 1969, 'Characteristic Exponents at  $L_4$  in the Elliptic Restricted Problem', Boeing Scientific Research Lab. document No. D1-82-0957.
- Grebenikov, E. A.: 1964, *Sov. Astron.* **8**, 451-459.
- Nayfey, A. H. et Kamel, A. A.: 1970, *AIAA J.* **8**, 221-223.
- Vinh, N. X.: 1972, 'Étude de quelques équations différentielles linéaires et non linéaires avec applications à la mécanique céleste', Thèse de Doctorat d'État, Université de Paris.