

# SUR LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DU MOUVEMENT PLAN DE LIBRATION DES SATELLITES ET DES PLANÈTES

NGUYEN X. VINH

*Dept. of Aerospace Engineering, Univ. of Michigan, Ann Arbor, Mich., U.S.A.*

(Received 5 September, 1972; in revised form 19 February, 1973)

**Résumé.** Ce papier présente une étude analytique du mouvement plan de rotation des satellites (et des planètes) dans leurs mouvements orbitaux. Les trois familles des solutions périodiques sont obtenues par la méthode du prolongement analytique de Poincaré. Ensuite, la stabilité de ces solutions périodiques est discutée, et les équations approchées des courbes limites de stabilité sont données jusqu'au quatrième ordre.

**Abstract.** This paper presents an analytical study of the rotational motion of the satellites (and the planets) in their orbital planes. The three families of periodic solutions are obtained by the method of analytical continuation as formulated by Poincaré. The stability of these solutions are analyzed, and the approximate equations of the transition curves are obtained to the fourth order.

## I: Les solutions périodiques

### 1. Introduction

Dans les applications des satellites artificiels, il est important de trouver des méthodes de stabilisation pour pouvoir les orienter par rapport à la planète d'attraction. Il est bien connu que des techniques simples de stabilisation peuvent se baser, non pas sur la position d'équilibre du satellite dans le système orbital des coordonnées, mais sur le mouvement régulier périodique du satellite autour de cette position.

Un autre exemple frappant du mouvement périodique des corps célestes est le mouvement de rotation de la planète Mercure. Jusqu'au 1965, les astronomes s'accordaient sur la valeur de la période de rotation sur elle-même de cette planète comme exactement égale à sa période de révolution autour du soleil, soit 87.96 jours. Cette valeur erronée a des influences sur les évaluations des caractères physiques de la planète comme les températures des régions éclairées et des parties dans l'ombre. Aussi la déception fut-elle vive lorsque les nouveaux résultats des mesures directes par radar de la vitesse de rotation de Mercure ont montré que sa période sidérale est de 58.64 jours, soit une valeur de résonance exactement égale aux deux tiers de sa période orbitale. Depuis, de nombreux travaux théoriques ont été publiés expliquant ce phénomène.

Nous nous proposons dans cet article de faire une étude analytique du mouvement de rotation des satellites (et des planètes) dans leurs mouvements orbitaux. Nous nous intéressons particulièrement aux mouvements périodiques et leurs stabilités. La méthode employée est l'application de la théorie du prolongement analytique de Poincaré pour trouver des solutions périodiques des équations différentielles non linéaires.

L'équation différentielle nonlinéaire du second ordre du mouvement plan du satellite

dans son plan orbital s'écrit

$$(1 + e \cos v) \frac{d^2 x}{dv^2} - 2e \sin v \frac{dx}{dv} + \mu \sin x = 4e \sin v, \quad (1)$$

où  $e$  est l'excentricité de l'orbite et  $v$  l'anomalie vraie. Nous avons posé

$$x = 2\theta, \quad \mu = 3 \frac{(A - C)}{B}, \quad (2)$$

$\theta$  est l'angle que fait un axe fixe du satellite avec le rayon vecteur et  $A, B, C$  désignent les moments d'inertie principaux (Figure 1). Les paramètres  $e$  et  $\mu$  dans l'équation (1) satisfont aux inégalités

$$0 \leq e < 1, \quad |\mu| \leq 3. \quad (3)$$

L'équation est complètement intégrable dans les cas  $\mu=0$ , et  $e=0$ . L'existence des solutions périodiques impaires de période  $2\pi$  a été montrée par Torzhevskii (1964), et la recherche numérique de ces solutions a été effectuée par Zlatoustov et ses collaborateurs (1964). Une description assez détaillée de ces résultats est donnée par Beletskii dans son ouvrage (1966). Dans ce papier nous nous proposons d'employer la méthode de prolongement analytique de Poincaré pour construire ces solutions périodiques à partir des solutions génératrices pour  $\mu=0$ , et  $e=0$ . La même méthode est

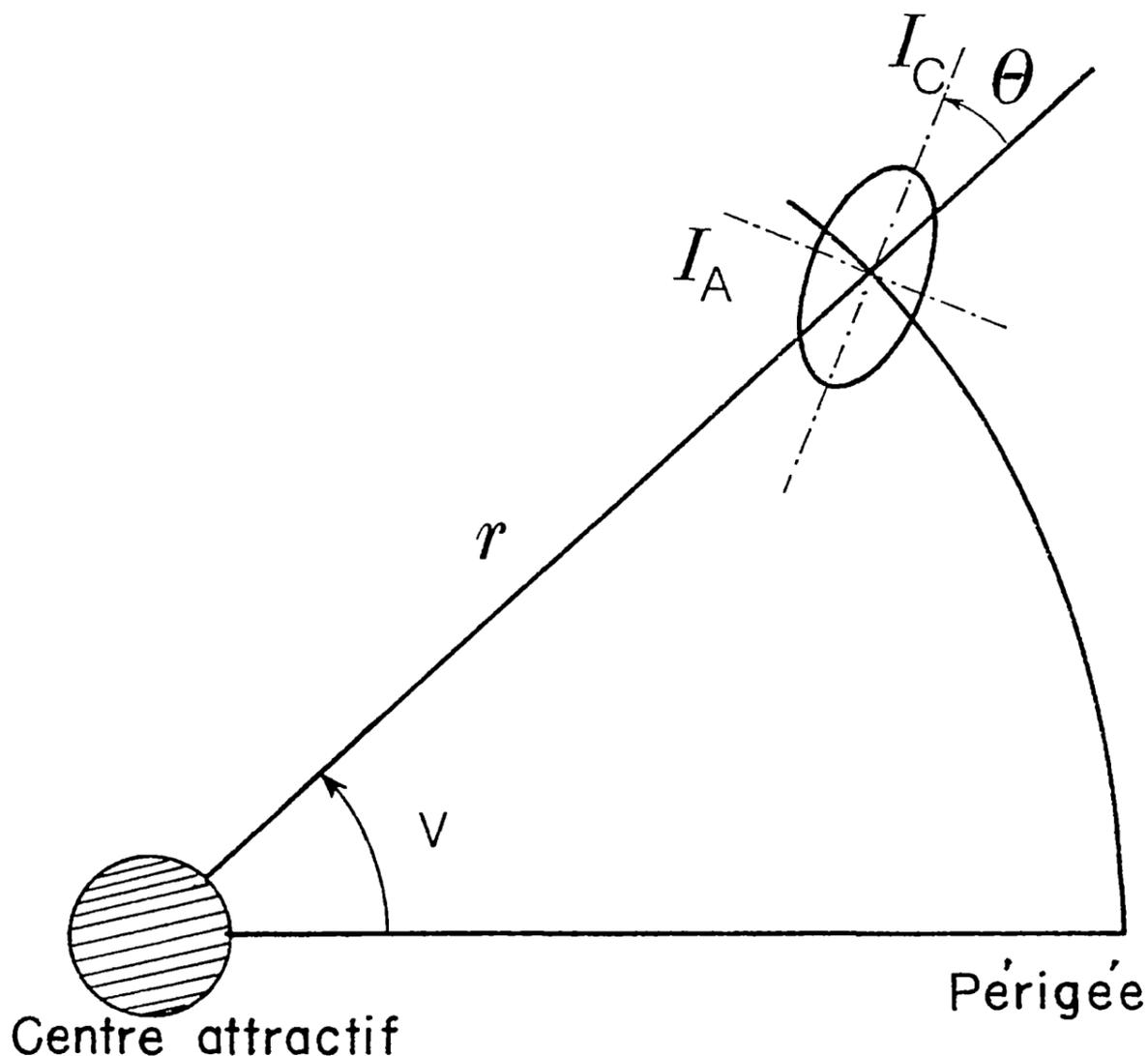


Fig. 1. Géométrie du satellite.  $I_A, I_C$ : axes principaux d'inertie correspondant aux moments  $A$  et  $C$ . L'axe  $I_B$  est toujours normal au plan d'orbite.

ensuite utilisée pour la discussion de la stabilité de ces solutions périodiques. Quoique les solutions analytiques ne sont valables que pour des valeurs assez petites de  $\mu$  et de  $e$ , nous trouvons que les résultats obtenus s'accordent bien avec les résultats numériques de Zlatoustov *et al.* (1964) dans un domaine assez large de l'espace  $(\mu, e)$ .

## 2. Solutions périodiques autour de $\mu=0$

Dans l'équation (1) nous faisons un changement de variable de l'anomalie vraie en anomalie moyenne. La nouvelle équation s'écrit

$$\frac{d^2x}{dM^2} + \mu \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \sin x = 4e \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \sin v, \quad (4)$$

où  $a$  est le demi-grand axe et  $r$ , le rayon vecteur

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v}. \quad (5)$$

Bien entendu,  $M$  désigne l'anomalie moyenne et  $E$ , l'anomalie excentrique. Pour  $\mu=0$ , nous avons l'équation linéaire avec second membre

$$\frac{d^2x}{dM^2} = 4e \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \sin v. \quad (6)$$

La solution générale de cette équation s'écrit

$$x = -2v + \alpha M + x_0, \quad (7)$$

où  $\alpha$  et  $x_0$  sont deux constantes d'intégration. En exprimant l'anomalie vraie en série de Fourier des multiples de l'anomalie moyenne nous pouvons écrire la solution (7) sous la forme

$$x = x_0 + (\alpha - 2) M + \psi(M), \quad (8)$$

où  $\psi(M)$  est une série de Fourier des sinus des multiples de  $M$ . D'une manière explicite, et au troisième ordre en  $e$

$$\psi(M) = -e(4 - \frac{1}{2}e^2) \sin M - \frac{5}{2}e^2 \sin 2M - \frac{13}{6}e^3 \sin 3M. \quad (9)$$

Le satellite a donc un mouvement de rotation uniforme par rapport au rayon vecteur, superimposé par un mouvement oscillatoire de période  $2\pi$ . Le mouvement peut être considéré comme périodique dans le sens large si  $\alpha$  est un nombre entier positif ou négatif, et dans le cas où  $\alpha=2$ , le mouvement est périodique pure. Nous observons que le cas  $\alpha=2$  est le cas de résonance principale. C'est le cas de la lune ou des satellites artificiels stabilisés par gradient de gravité. C'est aussi le cas traité par Zlatoustov (1964). Le cas  $\alpha=3$  est le cas du mouvement de Mercure. Il est discuté par Liu et O'Keeffe (1965), Jefferys (1966) et Pacault (1969). Ces traitements sont de nature numérique ou sont limités au premier ordre des développements en série.

Pour la solution génératrice (7) ou (8), nous prenons  $x_0 = 0$ , ce qui correspond à des solutions stables de rotation où à l'apogée, le plus petit axe principal est dirigé vers le centre de l'attraction.

Pour  $\mu \neq 0$ , nous posons

$$x = -2v + \alpha M + \varphi(M). \quad (10)$$

Par suite d'une substitution dans l'équation (4) nous avons l'équation en  $\varphi$

$$\frac{d^2\varphi}{dM^2} + \mu \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \sin(-2v + \alpha M + \varphi) = 0. \quad (11)$$

En suivant Moulton (1920), nous pouvons démontrer le théorème de symétrie suivant:

Supposons qu'au temps initial

$$M = 0, \quad \varphi = c_0, \quad \frac{d\varphi}{dM} = 0, \quad (12)$$

c'est à dire que la trajectoire  $\varphi(M)$  traverse l'axe des  $\varphi$  perpendiculairement. La solution de l'équation (11) avec les conditions initiales (12) est de

$$\varphi = f(M). \quad (13)$$

Dans l'équation (11) nous faisons le changement de variables

$$\varphi = -\bar{\varphi}, \quad M = -\bar{M}, \quad v = -\bar{v}. \quad (14)$$

Ce changement transforme l'équation (11) en elle-même, mais avec les nouvelles variables  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{M}$ , et  $\bar{v}$ . Donc si nous employons les mêmes conditions initiales

$$\bar{M} = 0, \quad \bar{\varphi} = c_0, \quad \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{M}} = 0. \quad (15)$$

nous avons la solution

$$\bar{\varphi} = f(\bar{M}). \quad (16)$$

Cela veut dire que nous avons

$$f(-M) = -f(M). \quad (17)$$

Donc, la solution de l'équation (11) avec les conditions initiales (12) est une fonction impaire du temps. Si nous la construisons comme une série de Fourier, elle ne contient que des sinus des multiples de l'anomalie moyenne, et par suite la constante initiale  $c_0$  s'annule.

Nous allons donc chercher les solutions périodiques de (11) sous la forme

$$\varphi(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \varphi_k(M), \quad (18)$$

où  $\varphi_k(M)$  sont des séries de Fourier des sinus des multiples de l'anomalie moyenne. En substituant (18) dans l'équation (11) et en égalant à zéro les coefficients de  $\mu, \mu^2, \dots$ , nous avons une suite des équations linéaires à second membre pour les  $\varphi_k(M)$

$$\frac{d^2\varphi_1}{dM^2} = \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \sin(2v - \alpha M) = f_1(M), \tag{19}$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dM^2} = -\varphi_1 \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \cos(2v - \alpha M) = f_2(M), \tag{20}$$

$$\frac{d^2\varphi_3}{dM^2} = -\frac{\varphi_1^2}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \sin(2v - \alpha M) - \varphi_2 \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \cos(2v - \alpha M) = f_3(M), \tag{21}$$

Le problème, c'est donc de trouver les développements en série de  $f_1(M), f_2(M), \dots$ , c'est à dire de  $(r/a)^{-3} \sin(2v - \alpha M)$  et  $(r/a)^{-3} \cos(2v - \alpha M)$ . Ce problème a été considéré par plusieurs auteurs et nous référons les travaux de Deprit et Rom (1967) et Vinh (1970). Nous donnons ci dessous les développements de  $(r/a)^{-3} \sin(2v - \alpha M)$  et  $(r/a)^{-3} \cos(2v - \alpha M)$  jusqu'au septième ordre en  $e$  (ce qui rend nécessaire l'inclusion des neuvièmes harmoniques à cause de la propriété d'Alembert) (Kovalevsky, 1963).

Nous avons:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \sin(2v - \alpha M) = & -\left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{16}e^3 + \frac{5}{384}e^5 + \frac{143}{18432}e^7\right) \sin(1 - \alpha)M - \\ & -\left(\frac{1}{48}e^3 + \frac{11}{768}e^5 + \frac{313}{30720}e^7\right) \sin(1 + \alpha)M + \\ & +\left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4 - \frac{35}{288}e^6\right) \sin(2 - \alpha)M - \\ & -\left(\frac{1}{24}e^4 + \frac{7}{240}e^6\right) \sin(2 + \alpha)M + \\ & +\left(\frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3 + \frac{489}{128}e^5 - \frac{1763}{2048}e^7\right) \sin(3 - \alpha)M - \\ & -\left(\frac{81}{1280}e^5 + \frac{81}{2408}e^7\right) \sin(3 + \alpha)M + \\ & +\left(\frac{17}{2}e^2 - \frac{115}{6}e^4 + \frac{601}{48}e^6\right) \sin(4 - \alpha)M - \\ & -\frac{4}{45}e^6 \sin(4 + \alpha)M + \\ & +\left(\frac{845}{48}e^3 - \frac{32525}{768}e^5 + \frac{1457575}{43008}e^7\right) \sin(5 - \alpha)M - \\ & -\frac{15625}{129024}e^7 \sin(5 + \alpha)M + \\ & +\left(\frac{533}{16}e^4 - \frac{13827}{160}e^6\right) \sin(6 - \alpha)M + \\ & +\left(\frac{228347}{3840}e^5 - \frac{3071075}{18432}e^7\right) \sin(7 - \alpha)M + \\ & +\frac{73369}{720}e^6 \sin(8 - \alpha)M + \\ & +\frac{12144273}{71680}e^7 \sin(9 - \alpha)M, \tag{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \cos(2v - \alpha M) = & - \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{16}e^3 + \frac{5}{384}e^5 + \frac{143}{18432}e^7\right) \cos(1 - \alpha)M + \\
& + \left(\frac{1}{48}e^3 + \frac{11}{768}e^5 + \frac{313}{30720}e^7\right) \cos(1 + \alpha)M + \\
& + \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4 - \frac{35}{288}e^6\right) \cos(2 - \alpha)M + \\
& + \left(\frac{1}{24}e^4 + \frac{7}{240}e^6\right) \cos(2 + \alpha)M + \\
& + \left(\frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3 + \frac{489}{128}e^5 - \frac{1763}{2048}e^7\right) \cos(3 - \alpha)M + \\
& + \left(\frac{81}{1280}e^5 + \frac{81}{2408}e^7\right) \cos(3 + \alpha)M + \\
& + \left(\frac{17}{2}e^2 - \frac{11}{6}e^4 + \frac{601}{48}e^6\right) \cos(4 - \alpha)M + \\
& + \frac{4}{45}e^6 \cos(4 + \alpha)M + \\
& + \left(\frac{845}{48}e^3 - \frac{32525}{768}e^5 + \frac{1457575}{43008}e^7\right) \cos(5 - \alpha)M + \\
& + \frac{15625}{129024}e^7 \cos(5 + \alpha)M + \\
& + \left(\frac{533}{16}e^4 - \frac{13827}{160}e^6\right) \cos(6 - \alpha)M + \\
& + \left(\frac{228347}{3840}e^5 - \frac{3071075}{18432}e^7\right) \cos(7 - \alpha)M + \\
& + \frac{73369}{720}e^6 \cos(8 - \alpha)M + \\
& + \frac{12144273}{71680}e^7 \cos(9 - \alpha)M. \tag{23}
\end{aligned}$$

Si nous prenons chacune des équations (19), (20), ..., le développement de  $f_k(M)$  a la forme

$$f_k(M) = a_1^k \sin M + a_2^k \sin 2M + \dots + a_p^k \sin pM + \dots, \tag{24}$$

et la solution pour  $\varphi_k(M)$ , satisfaisant aux conditions de périodicité  $\varphi_k(0) = \varphi_k(\pi) = 0$  est de

$$-\varphi_k(M) = \frac{a_1^k}{1^2} \sin M + \frac{a_2^k}{2^2} \sin 2M + \dots + \frac{a_p^k}{p^2} \sin pM + \dots. \tag{25}$$

Pour  $\alpha$  quelconque, et au premier ordre en  $\mu$  et jusqu'au septième ordre en  $e$ , nous avons

$$2\theta = -2v + \alpha M + \mu\varphi_1(M), \tag{26}$$

avec

$$\begin{aligned}
\varphi_1(M) = & \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{16}e^3 + \frac{5}{384}e^5 + \frac{143}{18432}e^7\right) \sin(1 - \alpha)M + \\
& + \frac{1}{(1 + \alpha)^2} \left(\frac{1}{48}e^3 + \frac{11}{768}e^5 + \frac{313}{30720}e^7\right) \sin(1 + \alpha)M - \\
& - \frac{1}{(2 - \alpha)^2} \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4 - \frac{35}{288}e^6\right) \sin(2 - \alpha)M + \\
& + \frac{1}{(2 + \alpha)^2} \left(\frac{1}{24}e^4 + \frac{7}{240}e^6\right) \sin(2 + \alpha)M - \\
& - \frac{1}{(3 - \alpha)^2} \left(\frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3 + \frac{489}{128}e^5 - \frac{1763}{2048}e^7\right) \sin(3 - \alpha)M + \tag{27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{(3 + \alpha)^2} \left( \frac{81}{1280} e^5 + \frac{81}{2408} e^7 \right) \sin(3 + \alpha) M - \\
 & - \frac{1}{(4 - \alpha)^2} \left( \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 + \frac{601}{48} e^6 \right) \sin(4 - \alpha) M + \\
 & + \frac{4e^6}{45(4 + \alpha)^2} \sin(4 + \alpha) M - \\
 & - \frac{1}{(5 - \alpha)^2} \left( \frac{845}{48} e^3 - \frac{32525}{768} e^5 + \frac{1457575}{43008} e^7 \right) \sin(5 - \alpha) M + \\
 & + \frac{15625 e^7}{129024(5 + \alpha)^2} \sin(5 + \alpha) M - \\
 & - \frac{1}{(6 - \alpha)^2} \left( \frac{533}{16} e^4 - \frac{13827}{160} e^6 \right) \sin(6 - \alpha) M - \\
 & - \frac{1}{(7 - \alpha)^2} \left( \frac{228347}{3840} e^5 - \frac{3071075}{18432} e^7 \right) \sin(7 - \alpha) M - \\
 & - \frac{73369 e^6}{720(8 - \alpha)^2} \sin(8 - \alpha) M - \frac{12144273 e^7}{71680(9 - \alpha)^2} \sin(9 - \alpha) M.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

On prendra soin de mettre à zéro le terme  $\sin(k - \alpha)M$  quand  $k = \alpha$ . Cette solution au premier ordre en  $\mu$  est suffisante pour le cas des satellites ou des planètes à peu près symétriques. En particulier, pour la lune ( $\alpha = 2$ ),  $\mu$  est connu et à peu près égal à  $6.15 \times 10^{-4}$ . Pour Mercure ( $\alpha = 3$ ), les calculs numériques de Liu et O’Keeffe (1965) ont conduits à la valeur  $\mu = 1.5 \times 10^{-4}$ .

Pour  $\alpha = 2$ , nous avons la solution jusqu’au second ordre en  $\mu$  et septième ordre en  $e$

$$2\theta = 2(M - v) + \mu\varphi_1(M) + \mu^2\varphi_2(M) + \dots.
 \tag{28}$$

La solution est purement périodique parce que la fonction  $(M - v)$  est une fonction impaire, périodique en  $M$  et de période  $2\pi$ . Comme les fonctions  $\varphi_i(M)$ , elle s’exprime en série de Fourier suivant les sinus des multiples de l’anomalie moyenne. Nous avons d’une manière explicite

$$\begin{aligned}
 2(M - v) = & - \left( 4e - \frac{e^3}{2} + \frac{5}{48}e^5 + \frac{107}{2304}e^7 \right) \sin M - \\
 & - \left( \frac{5}{2}e^2 - \frac{11}{12}e^4 + \frac{17}{96}e^6 \right) \sin 2M - \\
 & - \left( \frac{13}{6}e^3 - \frac{43}{32}e^5 + \frac{95}{256}e^7 \right) \sin 3M - \\
 & - \left( \frac{103}{48}e^4 - \frac{451}{240}e^6 \right) \sin 4M - \\
 & - \left( \frac{1097}{480}e^5 - \frac{5957}{2304}e^7 \right) \sin 5M - \\
 & - \frac{1223}{480}e^6 \sin 6M - \frac{47273}{16128}e^7 \sin 7M,
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(M) = & - \left( 4e - \frac{31}{4}e^3 + \frac{23}{6}e^5 - \frac{3931}{4608}e^7 \right) \sin M - \\
& - \frac{1}{8} \left( 17e^2 - \frac{115}{3}e^4 + \frac{601}{24}e^6 \right) \sin 2M - \\
& - \frac{1}{108} \left( 211e^3 - \frac{4067}{8}e^5 + \frac{260203}{640}e^7 \right) \sin 3M - \\
& - \frac{1}{768} \left( 1597e^4 - \frac{8299}{2}e^6 \right) \sin 4M - \\
& - \frac{1}{2400} \left( \frac{28513}{5}e^5 - \frac{924580199}{57792}e^7 \right) \sin 5M - \\
& - \frac{181}{64}e^6 \sin 6M - \frac{27305083}{7902720}e^7 \sin 7M, \tag{30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(M) = & - \left( 4e - \frac{505}{16}e^3 + \frac{124445}{1728}e^5 - \frac{23752475}{331776}e^7 \right) \sin M - \\
& - \frac{1}{32} \left( 65e^2 - \frac{9979}{18}e^4 + \frac{4744553}{3456}e^6 \right) \sin 2M - \\
& - \frac{1}{1296} \left( \frac{9565}{3}e^3 - \frac{2208253}{96}e^5 + \frac{1808991191}{32000}e^7 \right) \sin 3M - \\
& - \frac{1}{18432} \left( \frac{113567}{2}e^4 - \frac{144418423}{375}e^6 \right) \sin 4M - \\
& - \frac{1}{8640000} \left( \frac{171475247}{5}e^5 - \frac{1638628991911}{7224}e^7 \right) \sin 5M - \\
& - \frac{215358247}{41472000}e^6 \sin 6M - \frac{4778604364367}{697019904000}e^7 \sin 7M. \tag{31}
\end{aligned}$$

### 3. Emploi de l'anomalie excentrique comme variable indépendante

La solution périodique donnée dans le paragraphe précédent est valable pour des valeurs assez petites de  $\mu$ , et pour des valeurs petites et modérées de  $e$ . Quand  $e$  est très petite, et  $\mu > 1$ , nous devons partir des solutions génératrices pour  $e = 0$ . Nous avons obtenu les développements jusqu'à l'ordre de  $e^7$ . Ces développements peuvent être obtenus à partir du développement de  $(r/a)^{-2}$  (Vinh, 1970). Mais c'est un fait bien connu des astronomes qui ont travaillé sur les développements du mouvement képlérien qu'il est plus facile d'obtenir le développement de  $(r/a)^{-2}$  en série de Fourier des multiples de l'anomalie excentrique  $E$  qu'en série de Fourier des multiples de l'anomalie moyenne  $M$ . C'est donc l'anomalie excentrique  $E$  qu'il faudrait prendre comme variable indépendante quand on voudrait obtenir des solutions d'un ordre plus élevé en  $e$ .

Considérons par exemple l'équation (19) donnant  $\varphi_1$ . Changeons la variable indépendante de  $M$  en  $E$

$$\frac{d^2\varphi_1}{dE^2} - \frac{e \sin E}{1 - e \cos E} \frac{d\varphi_1}{dE} = \left( \frac{r}{a} \right)^{-1} \sin(2v - \alpha M). \tag{32}$$

Prenons une variable auxiliaire  $z_1$  définie par

$$\frac{d\varphi_1}{dE} = (1 - e \cos E) z_1, \tag{33}$$

$\varphi_1$  est obtenu par une simple intégration de série quand  $z_1$  est connue. En substituant (33) dans l'équation (32) nous avons l'équation linéaire du premier ordre en  $z_1$

$$\frac{dz_1}{dE} = \left( \frac{r}{a} \right)^{-2} \sin(2v - \alpha M). \tag{34}$$

Pour des solutions en séries de Fourier des multiples de l'anomalie excentrique  $E$ , il faut donc trouver les développements de  $(r/a)^{-2} \sin(2v - \alpha M)$  et  $(r/a)^{-2} \cos(2v - \alpha M)$ . En employant les formules de récurrence obtenues par Vinh (1970), nous pouvons obtenir les formules très symétriques suivantes

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-2} \sin 2v = \frac{\sqrt{1-e^2}}{3e^2} \frac{d}{dE} \left[ \frac{d^2}{dE^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{-1} + \left(\frac{r}{a}\right)^{-1} \right], \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} \cos 2v = & \frac{1}{3e^2} \left[ \frac{d^2}{dE^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{-1} + \left(\frac{r}{a}\right)^{-1} \right] - \\ & - \frac{(1-e^2)}{3e^2} \left[ \frac{d^2}{dE^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} + \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Comme les développements de  $(r/a)^{-1}$  et  $(r/a)^{-2}$  en séries de Fourier en  $E$  sont connus, nous en déduisons

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-2} \sin 2v = \frac{2}{3e^2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k^2-1) \beta^k \sin kE, \quad (37)$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-2} \cos 2v = \frac{2}{3e^2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k^2-1) \beta^k \cos kE, \quad (38)$$

où

$$\begin{aligned} \beta^k = & \left(\frac{e}{2}\right)^k + k \left(\frac{e}{2}\right)^{k+2} + \frac{k}{2!} (k+3) \left(\frac{e}{2}\right)^{k+4} + \\ & + \frac{k}{3!} (k+4)(k+5) \left(\frac{e}{2}\right)^{k+6} + \dots \end{aligned} \quad (39)$$

Finalement, pour les développements demandés

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} \sin(2v - \alpha M) = & \frac{4}{3e^2} \left( \sum_{k=2}^{\infty} k(k^2-1) \beta^k \sin(k-\alpha)E \right) \times \\ & \times \left[ \frac{1}{2} J_0(\alpha e) + \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\alpha e) \cos 2kE \right] + \\ & + \frac{4}{3e^2} \left( \sum_{k=2}^{\infty} k(k^2-1) \beta^k \cos(k-\alpha)E \right) \times \\ & \times \left( \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\alpha e) \sin(2k+1)E \right), \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{r}{a}\right)^{-2} \cos(2v - \alpha M) &= \frac{4}{3e^2} \left( \sum_{k=2}^{\infty} k(k^2 - 1) \beta^k \cos(k - \alpha) E \right) \times \\
&\times \left( \frac{1}{2} J_0(\alpha e) + \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\alpha e) \cos 2kE \right) - \\
&- \frac{4}{3e^2} \left( \sum_{k=2}^{\infty} k(k^2 - 1) \beta^k \sin(k - \alpha) E \right) \times \\
&\times \left( \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\alpha e) \sin(2k + 1) E \right), \quad (41)
\end{aligned}$$

où  $J_k(\alpha e)$  est la fonction de Bessel d'ordre  $k$  et d'argument  $\alpha e$ . Le problème est donc résolu, et l'on peut obtenir par des intégrations des équations de récurrence la solution périodique pour l'angle  $\theta$ , pour des valeurs entières arbitraires de  $\alpha$ , jusqu'à n'importe quel ordre en  $e$  et en  $\mu$  que l'on désire. Nous verrons aussi plus tard que la formule (41) permet de construire un critère de stabilité sous forme explicite.

#### 4. Solutions périodiques autour de $e=0$

Les solutions périodiques trouvées précédemment s'appliquent au cas où  $e=0$ . Dans ce cas, nous avons simplement  $\theta=0$ . Le satellite pointe toujours un de ses axes vers le centre d'attraction et tourne avec la même vitesse angulaire que son centre de gravité dans sa révolution autour du corps primaire. Nous appellerons cette solution génératrice la solution A et la famille des solutions périodiques obtenue par un prolongement analytique à partir de cette solution, la famille des solutions périodiques de type A.

Pour  $e=0$ , il existe d'autres solutions génératrices que nous appellerons les solutions B et C. De ces solutions, par des prolongements analytiques, nous pouvons générer deux autres familles de solutions périodiques que nous appellerons les solutions périodiques de type B et C.

Pour  $e=0$ , l'équation (1) devient l'équation du pendule simple

$$\frac{d^2 x}{dv^2} + \mu \sin x = 0. \quad (42)$$

La solution  $x=0$  est la solution génératrice A. Les solutions génératrices B et C sont données en séries des sinus des multiples de l'anomalie vraie par

$$x = \eta \sin v - \frac{\eta^3}{64} (\sin v - \frac{1}{3} \sin 3v) - \frac{\eta^5}{4096} (\sin v - \frac{1}{5} \sin 5v) + O(\eta^7), \quad (43)$$

où la vitesse initiale  $\eta$  doit satisfaire à l'équation

$$\mu = 1 + \frac{\eta^2}{8} + \frac{3}{512}\eta^4 + O(\eta^6). \quad (44)$$

D'une manière exacte,  $\eta$  est obtenue en résolvant l'équation transcendante

$$K\left(\frac{\eta^2}{4\mu}\right) = \frac{\pi\sqrt{\mu}}{2}, \quad (45)$$

où  $K$  est l'intégrale elliptique complète de première espèce. Pour  $\mu \geq 1$ , on peut trouver deux valeurs opposées de  $\eta$  qui correspondent à deux solutions périodiques génératrices. Nous appellerons les solutions B celles qui correspondent à des valeurs positives de  $\eta$  et les solutions C celles qui correspondent à ses valeurs négatives.

#### A. SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE TYPE A

Cette famille de solutions périodiques est obtenue par un prolongement analytique à partir de la solution

$$e = 0, \quad x = 0, \quad \left(\frac{dx}{dv}\right)_0 = 0. \quad (46)$$

Pour  $e \neq 0$ , posons

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} e^k x_k(v). \quad (47)$$

Les  $x_k(v)$  sont des fonctions périodiques de  $v$ , de période  $2\pi$ . Elles satisfont aux conditions initiales

$$e \neq 0, \quad x_k(0) = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} e^k \frac{dx_k(0)}{dv} = \eta. \quad (48)$$

En substituant la solution (47) dans l'équation (1) et en égalant les coefficients de même puissance de  $e$ , nous avons une série d'équations pour déterminer les fonctions  $x_k(v)$

$$\begin{aligned} x_1'' + \mu x_1 &= 4 \sin v, \\ x_2'' + \mu x_2 &= 2x_1' \sin v - x_1'' \cos v, \\ x_3'' + \mu x_3 &= 2x_2' \sin v - x_2'' \cos v + \frac{\mu}{6} x_1^3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (49)$$

Les primes représentent les dérivées prises par rapport à  $v$ . En effectuant les intégrations successives, et en employant les conditions initiales (48) et les conditions de périodicité, nous avons la solution jusqu'au cinquième ordre en  $e$

$$\begin{aligned}
x &= ex_1 + e^2x_2 + e^3x_3 + e^4x_4 + e^5x_5, \\
x_1 &= \frac{4}{(\mu - 1)} \sin v, \\
x_2 &= \frac{6}{(\mu - 1)(\mu - 4)} \sin 2v, \\
x_3 &= \frac{8\mu}{(\mu - 1)^4} \sin v + \frac{8(8\mu^2 - 14\mu + 9)}{3(\mu - 1)^3(\mu - 4)(\mu - 9)} \sin 3v, \\
x_4 &= \frac{4(17\mu^3 - 121\mu^2 + 185\mu - 9)}{(\mu - 1)^4(\mu - 4)^2(\mu - 9)} \sin 2v + \\
&\quad + \frac{4(37\mu^2 - 43\mu + 45)}{(\mu - 1)^3(\mu - 4)(\mu - 9)(\mu - 16)} \sin 4v, \\
x_5 &= \frac{4\mu(9\mu^4 - 216\mu^3 + 1038\mu^2 - 1536\mu - 159)}{(\mu - 1)^7(\mu - 4)^2(\mu - 9)} \sin v + \\
&\quad + \frac{2(477\mu^6 - 6836\mu^5 + 35442\mu^4 - 77076\mu^3 + 76313\mu^2 - 39552\mu + 2592)}{(\mu - 1)^6(\mu - 4)^2(\mu - 9)^2(\mu - 16)} \sin 3v + \\
&\quad + \frac{2(4287\mu^5 - 28221\mu^4 + 56385\mu^3 - 66099\mu^2 + 52008\mu - 21600)}{5(\mu - 1)^5(\mu - 4)^2(\mu - 9)(\mu - 16)(\mu - 25)} \sin 5v.
\end{aligned} \tag{50}$$

## B. SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE TYPE B ET C

Ces solutions sont obtenues par des prolongements analytiques des solutions (43) que nous écrivons, en adoptant l'indice zéro pour désigner les solutions génératrices.

$$x_0 = 4\varepsilon \sin v - \varepsilon^3 \left( \sin v - \frac{1}{3} \sin 3v \right) - \frac{\varepsilon^5}{4} \left( \sin v - \frac{1}{5} \sin 5v \right) + \dots \tag{51}$$

où

$$\varepsilon = \frac{\eta_0}{4}, \quad \mu = 1 + 2\varepsilon^2 + \frac{3}{2}\varepsilon^4 + \dots. \tag{52}$$

Aux valeurs positives de  $\varepsilon$  nous avons la famille B et aux valeurs négatives nous avons la famille C.

Pour des valeurs assez petites de  $e$ , nous considérons les solutions de l'équation non linéaire (1) sous la forme

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} e^k x_k, \tag{53}$$

où les  $x_k$  sont des fonctions périodiques de  $v$  et de période  $2\pi$ . Les conditions initiales sont à trouver sous la forme

$$x(0) = 0, \quad \left( \frac{dx}{dv} \right)_0 = \eta = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \eta_k. \tag{54}$$

De là, nous voyons que les conditions équivalentes s'écrivent

$$x_k(0) = 0, \quad \left(\frac{dx_k}{dv}\right)_0 = \eta_k, \quad \eta_0 = 4\varepsilon. \quad (55)$$

Les valeurs de  $\eta_k$  sont à trouver en fonction du paramètre d'inertie  $\mu$ , c'est à dire ultérieurement en fonction de  $\varepsilon$  par la relation (52) pour rendre les solutions (53) périodiques et de période  $2\pi$ . En substituant (53) dans l'équation (1) et en égalant les coefficients de même puissance en  $e$  nous avons une suite d'équations pour calculer les  $x_k$  par des intégrations successives.

$$\begin{aligned} x_0'' + \mu \sin x_0 &= 0, \\ x_1'' + (\mu \cos x_0) x_1 &= -x_0'' \cos v + 2x_0' \sin v + 4 \sin v, \\ x_2'' + (\mu \cos x_0) x_2 &= -x_1'' \cos v + 2x_1' \sin v + \frac{\mu}{2} x_1^2 \sin x_0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (56)$$

L'intégration de la première équation nous donne la solution (51) avec  $\varepsilon$  donné par (52). En utilisant cette solution dans la deuxième équation nous avons une équation linéaire non homogène du second ordre avec coefficient variable pour calculer  $x_1$ . Il est clair que ce procédé de récurrence demande les développements de  $\cos x_0$  et  $\sin x_0$  en séries de Fourier des cosinus et des sinus des multiples de l'anomalie vraie. Ces développements sont laborieux, mais les calculs sont simples avec des multiplications des séries avec les fonctions de Bessel comme coefficients. A l'ordre de  $\varepsilon^5$

$$\begin{aligned} \cos x_0 &= (1 - 4\varepsilon^2 + 6\varepsilon^4) + 4\varepsilon^2 (1 - 2\varepsilon^2) \cos 2v + 2\varepsilon^4 \cos 4v, \\ \sin x_0 &= \varepsilon (4 - 9\varepsilon^2 + \frac{47}{4}\varepsilon^4) \sin v + 3\varepsilon^3 (1 - 2\varepsilon^2) \sin 3v + \frac{5}{4}\varepsilon^5 \sin 5v. \end{aligned} \quad (57)$$

En exprimant  $\mu$  en fonction de  $\varepsilon$  par l'équation (52), et en employant le première série (57) pour  $\cos x_0$ , et la solution génératrice (51), nous pouvons maintenant écrire l'équation explicite pour calculer  $x_1$

$$\begin{aligned} x_1'' + \left[ \left(1 - 2\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{2}\right) + 4\varepsilon^2 \cos 2v + 2\varepsilon^4 \cos 4v \right] x_1 &= \\ &= 4 \sin v + \varepsilon (6 - \varepsilon^2 - \frac{3}{8}\varepsilon^4) \sin 2v + \frac{\varepsilon^3}{2} (5 + \frac{3}{4}\varepsilon^2) \sin 4v + \frac{7}{8}\varepsilon^5 \sin 6v. \end{aligned} \quad (58)$$

L'équation sans second membre est une équation de Hill qui, en général, ne donne pas des solutions périodiques à moins que les exposants caractéristiques ne s'annulent identiquement. Dans ce cas l'intégrale particulière contient des termes séculaires et la solution  $x_1$  est alors non périodique. Il est aisé de voir que ce cas correspond à  $\varepsilon=0$ , c'est à dire  $\mu=1$ , donc c'est précisément le cas de résonance. Donc, pour obtenir une solution périodique pour  $x_1$ , il suffit de calculer seulement l'intégrale particulière de

l'équation (58). D'une manière générale, pour l'équation en  $x_k$ , cette solution particulière peut être trouvée sous la forme

$$x_k = \sum_{j=1}^{\infty} b_j^{(k)} \sin jv, \quad k \geq 1, \quad (59)$$

avec l'équation en  $x_k$

$$x_k'' + \left[ \left( 1 - 2\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{2} \right) + 4\varepsilon^2 \cos 2v + 2\varepsilon^4 \cos 4v \right] x_k = f_k(v), \quad (60)$$

où le second membre est une fonction connue de  $v$  et de  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ . Ces solutions sont évaluées dans les étapes précédentes et il est aisé de voir que  $f_k(v)$  peut être développée en série de Fourier des sinus des multiples de  $v$ , soit

$$f_k(v) = c_1^{(k)} \sin v + c_2^{(k)} \sin 2v + c_3^{(k)} \sin 3v + \dots, \quad (61)$$

les  $c_j^{(k)}$  sont des coefficients connus, fonctions de  $\varepsilon$ . En substituant la solution (59) dans (60) et en égalant les harmoniques correspondantes nous avons un système d'équations linéaires pour les  $b_j^{(k)}$ . En prenant cinq harmoniques, nous avons pour les coefficients impairs

$$\begin{aligned} b_1^{(k)} &= \frac{1}{\Delta_1} \left[ \left( 192 + 64\varepsilon^2 + 16\varepsilon^4 + 2\varepsilon^6 + \frac{\varepsilon^8}{4} \right) c_1^{(k)} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \left( 48 - 20\varepsilon^2 + \varepsilon^4 - \frac{\varepsilon^6}{2} \right) c_3^{(k)} + \varepsilon^4 \left( 12 + \frac{\varepsilon^4}{2} \right) c_5^{(k)} \right], \\ b_3^{(k)} &= \frac{\varepsilon^2}{\Delta_1} \left[ \left( 48 - 18\varepsilon^2 - \varepsilon^4 - \frac{\varepsilon^6}{2} \right) c_1^{(k)} + \right. \\ &\quad \left. + \left( 96 + 20\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4 + \frac{\varepsilon^6}{4} \right) c_3^{(k)} + \varepsilon^2 (8 + 3\varepsilon^2 - \varepsilon^4) c_5^{(k)} \right], \\ b_5^{(k)} &= \frac{\varepsilon^2}{\Delta_1} \left[ (8 + 6\varepsilon^2 - \frac{3}{2}\varepsilon^4) c_1^{(k)} + 10\varepsilon^2 c_3^{(k)} + (32 + 8\varepsilon^2 + 7\varepsilon^4 - \frac{3}{4}\varepsilon^6) c_5^{(k)} \right], \end{aligned} \quad (62)$$

avec

$$\Delta_1 = -\varepsilon^2 (768 + 256\varepsilon^2 + 172\varepsilon^4 - 6\varepsilon^6 + \frac{7}{2}\varepsilon^8 - \frac{3}{8}\varepsilon^{10}). \quad (63)$$

Pour les coefficients pairs, nous avons

$$\begin{aligned} b_2^{(k)} &= -\frac{1}{\Delta_2} \left[ \left( 15 + 2\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^4}{2} \right) c_2^{(k)} + 2\varepsilon^2 c_4^{(k)} \right], \\ b_4^{(k)} &= -\frac{1}{\Delta_2} \left[ 2\varepsilon^2 c_2^{(k)} + (3 + 2\varepsilon^2 + \frac{3}{2}\varepsilon^4) c_4^{(k)} \right], \end{aligned} \quad (64)$$

avec

$$\Delta_2 = (45 + 36\varepsilon^2 + 24\varepsilon^4 + 4\varepsilon^6 + \frac{3}{4}\varepsilon^8). \quad (65)$$

La totalité des solutions périodiques pures ( $\alpha=2$ ) a été obtenue par Zlatoustov (1964) par une intégration numérique de l'équation (1). Ces calculs numériques ont été repris d'une manière plus complète par Modi et Brereton (1969). Ces solutions

sont représentées sur la Figure 2. Pour chaque valeur de  $\mu$ , la vitesse initiale a été trouvée en fonction de l'excentricité  $e$  pour rendre la solution périodique. Nous avons indiqué par des cercles les solutions analytiques correspondantes. Pour des valeurs petites de  $\mu$ , la solution (28) est très précise. En particulier, nous avons l'équation exacte de la courbe  $\mu=0$  dans l'espace  $(\eta/2, e)$

$$\frac{\eta}{2} = -1 + \frac{(1 - e)^{3/2}}{(1 + e)^{1/2}}. \tag{66}$$

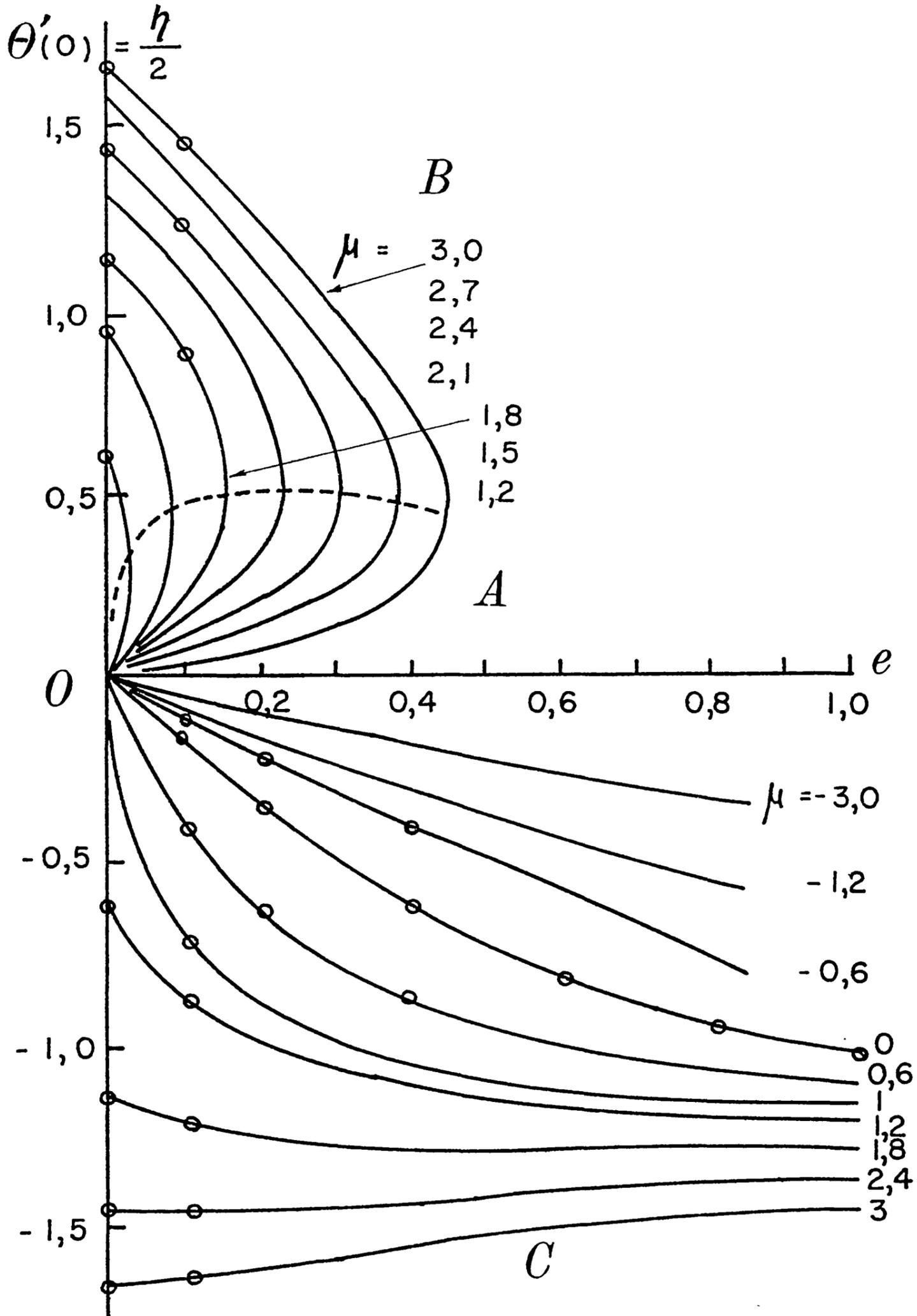


Fig. 2. Les solutions périodiques de type A, B, et C, au périgée  $\theta=0$  et  $d\theta/dv = \theta'(0)$ , sont représentées sur la figure en fonction de  $e$  et  $\mu$ .

Pour des valeurs petites de  $e$  il faut employer les solutions (50) pour les solutions de type A, et les solutions (59) pour les solutions de type B et C. Les valeurs des points sur l'axe des ordonnées  $\eta/2$  sont données par les équations exactes

$$K(k^2) = \frac{\pi\sqrt{\mu}}{2}, \quad \frac{\eta_0}{2} = k\sqrt{\mu}. \quad (67)$$

Pour chaque valeur de  $\mu$ , on calcule  $k^2$  par les tables des intégrales elliptiques complètes et ensuite on obtient la valeur correspondante de  $\eta_0/2$ . Sur la figure on voit que les solutions périodiques de type C existent toujours pour les valeurs de  $1 \leq \mu \leq 3$ , tandis que les solutions de type B rencontrent les solutions de type A le long d'une courbe en pointillé appelée courbe de bifurcation. Ce phénomène a été démontré par Poincaré dans ses *Nouvelles Méthodes*.

### 5. Solution par la méthode des harmoniques

La forme fonctionnelle des solutions périodiques impaires de période  $2n\pi$  est donnée par

$$x_{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} \sin \frac{kv}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (68)$$

Une méthode simple pour obtenir cette série est de la substituer dans l'équation (1) et ensuite d'égaliser les coefficients des mêmes harmoniques pour avoir une suite d'équations pour calculer les coefficients de la série. Cette méthode a été employée par Beletskii (1966), Modi et Brereton (1969) et récemment par Liu (1971) avec l'anomalie moyenne comme la variable indépendante. Cette méthode a le désavantage de devenir rapidement compliquée quand on prend plus de deux harmoniques. Même avec seulement trois harmoniques on doit résoudre un système d'équations algébriques non linéaires, ce qui fait que la solution numérique de ce système demande un travail équivalent à l'intégration numérique de l'équation différentielle donnée. En plus, la précision est seulement bonne pour les solutions de type A qui ont des amplitudes faibles. Nous avons appliqué partiellement la méthode dans le paragraphe précédent quand il s'agit d'un prolongement analytique. Dans ce cas les équations sont linéaires, et l'on pourrait prendre autant d'harmoniques que l'on veut. Aussi la précision dépend de la valeur de  $e$ , et pour des valeurs assez petites de ce paramètre, la méthode donne des séries convergentes pour les solutions comme Poincaré l'avait démontré d'une manière rigoureuse.

A part ce défaut, la méthode des harmoniques nous permet d'avoir l'équation approchée de la courbe de bifurcation, courbe en pointillé sur la Figure 2, avec une très bonne précision. Par exemple, nous considérons les trois premières harmoniques

$$x = \eta_1 \sin v + \eta_2 \sin 2v + \eta_3 \sin 3v. \quad (69)$$

En substituant dans l'équation (1)

$$\begin{aligned} \mu \sin x = (\eta_1 + 4e) \sin v + \left( \frac{3e}{2} \eta_1 + 4\eta_2 + \frac{3e}{2} \eta_3 \right) \sin 2v + \\ + (9\eta_3 + 4e\eta_2) \sin 3v + \frac{15e}{2} \eta_3 \sin 4v. \end{aligned} \quad (70)$$

La fonction  $\sin x$  peut être développée en série de Fourier

$$\sin x = S_1 \sin v + S_2 \sin 2v + S_3 \sin 3v + \dots \quad (71)$$

En négligeant les termes non linéaires en  $\eta_2$  et  $\eta_3$  nous avons les valeurs approchées

$$\begin{aligned} S_1 &= 2J_1(\eta_1) + \eta_3 [J_2(\eta_1) - J_4(\eta_1)], \\ S_2 &= \eta_2 [J_0(\eta_1) - J_4(\eta_1)], \\ S_3 &= \eta_3 [J_0(\eta_1) - J_6(\eta_1)] + 2J_3(\eta_1). \end{aligned} \quad (72)$$

L'amplitude  $\eta_1$  de la première harmonique peut être large, mais les termes dans les séries de Bessel décroissent rapidement. Comme  $J_k(\eta_1) \sim \eta_1^k / (2^k k!)$  nous retenons seulement les termes jusqu'au troisième ordre en  $\eta_1$ . Nous avons donc le système des équations suivantes pour calculer les  $\eta_i$

$$\begin{aligned} 2\mu J_1(\eta_1) + \mu\eta_3 J_2(\eta_1) &= \eta_1 + 4e, \\ 2\mu\eta_2 J_0(\eta_1) &= 3e\eta_1 + 8\eta_2 + 3e\eta_3, \\ \mu\eta_3 J_0(\eta_1) + 2\mu J_3(\eta_1) &= 9\eta_3 + 4e\eta_2. \end{aligned} \quad (73)$$

Les équations sont linéaires en  $\eta_2$  et  $\eta_3$ . Leur élimination nous donne une équation résultante transcendante en  $\eta_1$ . En prenant seulement les deux premières harmoniques nous avons l'équation de Beletskii (1966)

$$2\mu J_1(\eta_1) - \eta_1 = 4e. \quad (74)$$

Cette équation donne deux valeurs positives et une valeur négative pour  $\eta_1$ . Elles correspondent aux trois familles des solutions périodiques. Quand l'équation a une racine double, les deux familles A et B se coincident et nous avons la courbe de bifurcation. En prenant la dérivée de (74)

$$2\mu \left[ J_0(\eta_1) - \frac{J_1(\eta_1)}{\eta_1} \right] - 1 = 0. \quad (75)$$

En éliminant  $\mu$  entre les équations (74) et (75) nous avons l'équation de la courbe de bifurcation dans l'espace  $(\eta/2, e)$

$$e = \frac{\eta [2J_1(\eta) - \eta J_0(\eta)]}{4 [\eta J_0(\eta) - J_1(\eta)]}. \quad (76)$$

En fonction de  $\eta$ ,  $\mu$  est donné par

$$\mu = \frac{\eta}{2[\eta J_0(\eta) - J_1(\eta)]}. \quad (77)$$

Donc, les équations (76) et (77) peuvent être considérées comme équations paramétriques de la courbe de bifurcation dans l'espace  $(\mu, e)$ . Cette courbe est aussi la courbe de résonance issue du point  $e=0, \mu=1$  (Figure 3). En arrêtant à l'ordre de  $\eta^3$ , les équations (76) et (77) s'écrivent

$$\begin{aligned} e &= \frac{\eta^3}{16(1 - \frac{3}{8}\eta^2)}, \\ \mu &= \frac{1}{1 - \frac{3}{8}\eta^2}. \end{aligned} \quad (78)$$

En éliminant  $\eta$  entre ces deux équations, nous avons l'équation pour la courbe de bifurcation donnée par Beletskii (1966)

$$e = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2(\mu - 1)^3}{3\mu}}. \quad (79)$$

## II. La stabilité des solutions périodiques

### 1. Introduction

Comme les solutions périodiques ont été trouvées sous forme explicite des séries de Fourier, nous sommes maintenant en mesure de faire une étude analytique de la stabilité de ces solutions. L'étude numérique a été effectuée par le groupe de Zlatoustov (1964). Les résultats numériques sont représentés sur la Figure 3 en des traits pleins. Sur la même figure, les lignes en pointillé représentent les résultats analytiques de ce travail. L'étude numérique de Zlatoustov a conduit aux résultats suivants:

Les solutions périodiques de type A qui ont des amplitudes faibles et des vitesses initiales positives se trouvent au dessus de la courbe de bifurcation, courbe de résonance issue du point  $e=0, \mu=1$ . Elles sont stables sauf dans la région de résonance émanant du point  $e=0, \mu=\frac{9}{4}$ . Les solutions périodiques de type B sont toujours instables. Les solutions périodiques de type A qui ont des vitesses initiales négatives, et les solutions périodiques de type C sont stables dans une région de forme plus irrégulière. Cette région est limitée d'une part la courbe limite qui part du point  $e=0.682, \mu=0$ , et d'autre part par la courbe de résonance émanant du point  $e=0, \mu=\frac{1}{4}$ , et en bas par l'axe  $\mu=0$ .

Dans les paragraphes suivants, nous nous proposons de dériver les équations analytiques de ces courbes dans l'espace  $(\mu, e)$ .

## 2. Un critère de stabilité pour $\mu \approx 0$

Considérons l'équation du mouvement (4) de la première partie

$$\frac{d^2x}{dM^2} + \mu \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \sin x = 4e \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \sin v. \quad (1)$$

Tout d'abord, sur l'axe  $\mu=0$ , nous avons la solution exacte

$$x^* = -2v + \alpha M. \quad (2)$$

Ecrivons l'équation aux variations

$$x = x^* + \xi, \quad \frac{d^2\xi}{dM^2} = 0. \quad (3)$$

Ce qui donne pour la perturbation  $\xi$

$$\xi = C_1 M + C_2, \quad (4)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes d'intégration. Les points de l'axe  $\mu=0$  sont donc instables. Au contraire, pour des valeurs petites de  $\mu$ , les solutions périodiques peuvent être stables pour certaines valeurs de  $e$  (cas de la lune et de Mercure). La courbe limite de la région stable rencontre l'axe  $\mu=0$  en un point qui correspond à la valeur critique de l'excentricité. Pour trouver cette valeur, nous considérons l'équation du mouvement sous la forme donnée par l'équation (11) de la première partie

$$\frac{d^2\varphi}{dM^2} + \mu \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \sin(-2v + \alpha M + \varphi) = 0. \quad (5)$$

Considérons la solution périodique  $\varphi^*$  que nous voulons en étudier sa variation. Cette solution est donnée par l'équation (18) de la première partie. Posons

$$\varphi = \varphi^* + \xi. \quad (6)$$

L'équation aux variations, linéaire en  $\xi$ , s'écrit

$$\frac{d^2\xi}{dM^2} + \mu \left( \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \cos(2v - \alpha M - \varphi^*) \right) \xi = 0. \quad (7)$$

Quand  $\varphi^*$  est remplacée par son expression, nous avons une équation de Hill. Quand  $\mu$  tend vers zéro, nous pouvons appliquer directement la méthode des valeurs moyennes à l'équation (5). Nous avons, comme équation moyenne, pour une période

de  $2\pi$

$$\frac{d^2\varphi}{dM^2} + \mu\Phi_\alpha(e) \sin\varphi = 0, \quad (8)$$

où

$$\Phi_\alpha(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \cos(2v - \alpha M) dM. \quad (9)$$

C'est la méthode employée par Chernousko (1963) pour trouver la solution approchée asymptotique de  $\varphi$ . L'équation (8) peut être intégrée par l'usage des intégrales elliptiques. La solution est stable quand

$$\mu\Phi_\alpha(e) > 0. \quad (10)$$

La valeur de l'excentricité limite est donc donnée par l'équation  $\Phi_\alpha(e^*) = 0$ . Pour  $\alpha = 2$ , c'est à dire pour le cas de la Figure 3,  $e^* = 0.682$ . Lutze et Abbit (1969) ont intégré numériquement l'intégrale (9) pour les valeurs entières différentes de  $\alpha$  (Figure 4).

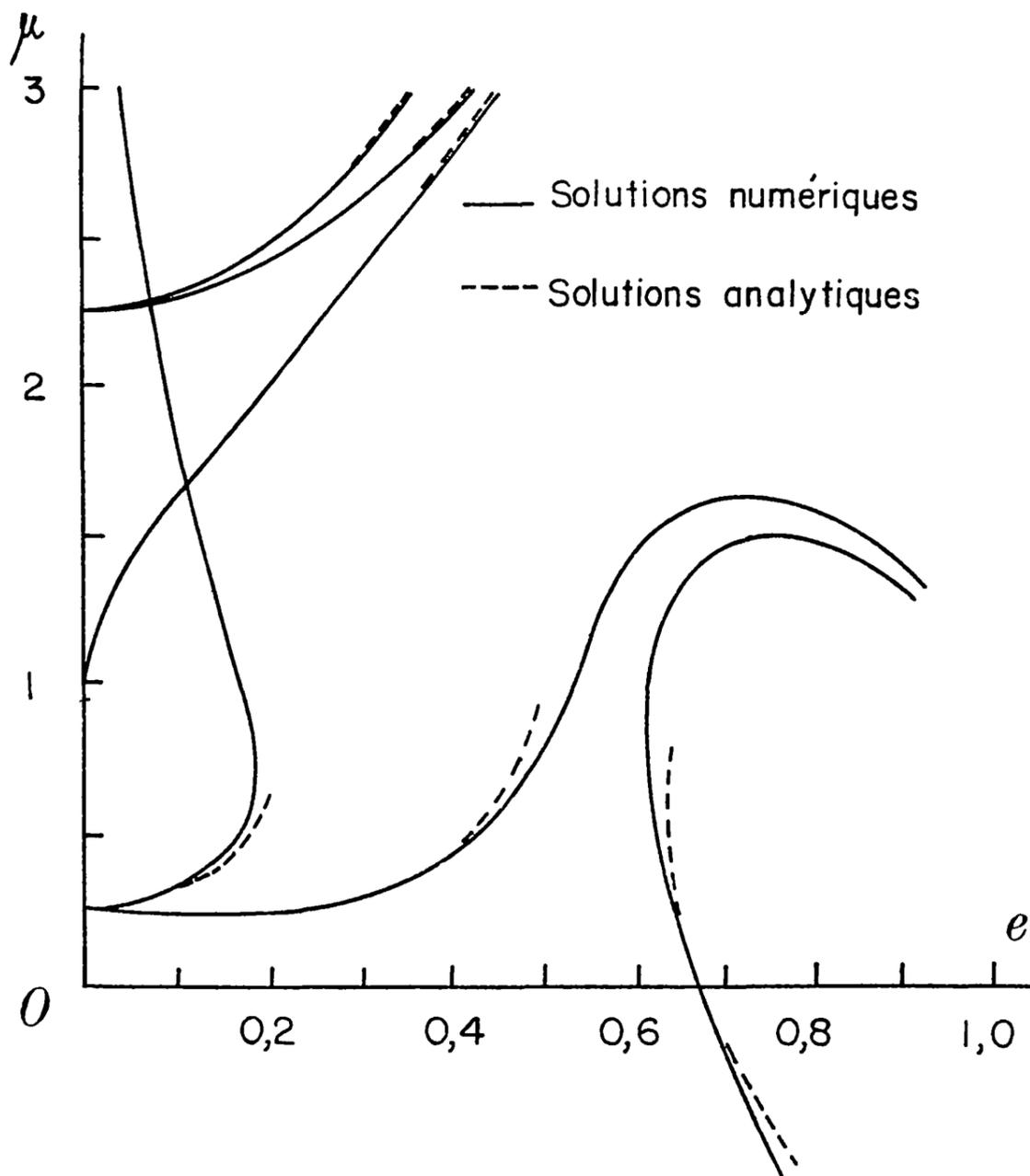


Fig. 3. Zones de stabilité des solutions de type A et C. Type A avec  $\theta'(0) > 0$ : les courbes limites sont les trois courbes émanant de  $e = 0, \mu = 1$ , et de  $e = 0, \mu = 9/4$ . Type A avec  $\theta'(0) < 0$  et type C: 1 courbes limites sont l'axe  $\mu = 0$  et les trois courbes émanant de  $e = 0, \mu = \frac{1}{4}$  et de  $e = 0.682, \mu = 0$ . En particulier, la zone d'en bas à droite où  $e > 0.682$  et  $\mu < 0$  est une zone de stabilité.

Nous donnons ici l'expression explicite de cette fonction. Tout d'abord nous observons que  $\Phi_\alpha(e)$  est le terme constant dans le développement de  $(r/a)^{-3} \cos(2v - \alpha M)$  en série de Fourier en  $M$ . Donc, pour l'expression de  $\Phi_\alpha(e)$  jusqu'à l'ordre de  $e^7$ , nous avons immédiatement en employant le développement donné par l'équation (23) de la première partie. Nous avons

$$\begin{aligned} \Phi_1(e) &= -\frac{1}{2}e + \frac{1}{16}e^3 - \frac{5}{384}e^5 - \frac{143}{18432}e^7, \\ \Phi_2(e) &= 1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4 - \frac{35}{288}e^6, \\ \Phi_3(e) &= \frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3 + \frac{489}{128}e^5 - \frac{1763}{2048}e^7, \\ \Phi_4(e) &= \frac{17}{2}e^2 - \frac{115}{6}e^4 + \frac{601}{48}e^6, \\ \Phi_5(e) &= \frac{845}{48}e^3 - \frac{32527}{768}e^5 + \frac{1457575}{43008}e^7, \\ \Phi_6(e) &= \frac{533}{16}e^4 - \frac{13827}{160}e^6. \end{aligned} \tag{11}$$

Pour avoir la formule générale pour  $\Phi_\alpha(e)$ , il suffit de changer la variable d'intégration dans l'équation (9) de  $M$  and  $E$ . Nous avons

$$\Phi_\alpha(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} \cos(2v - \alpha M) dE. \tag{12}$$

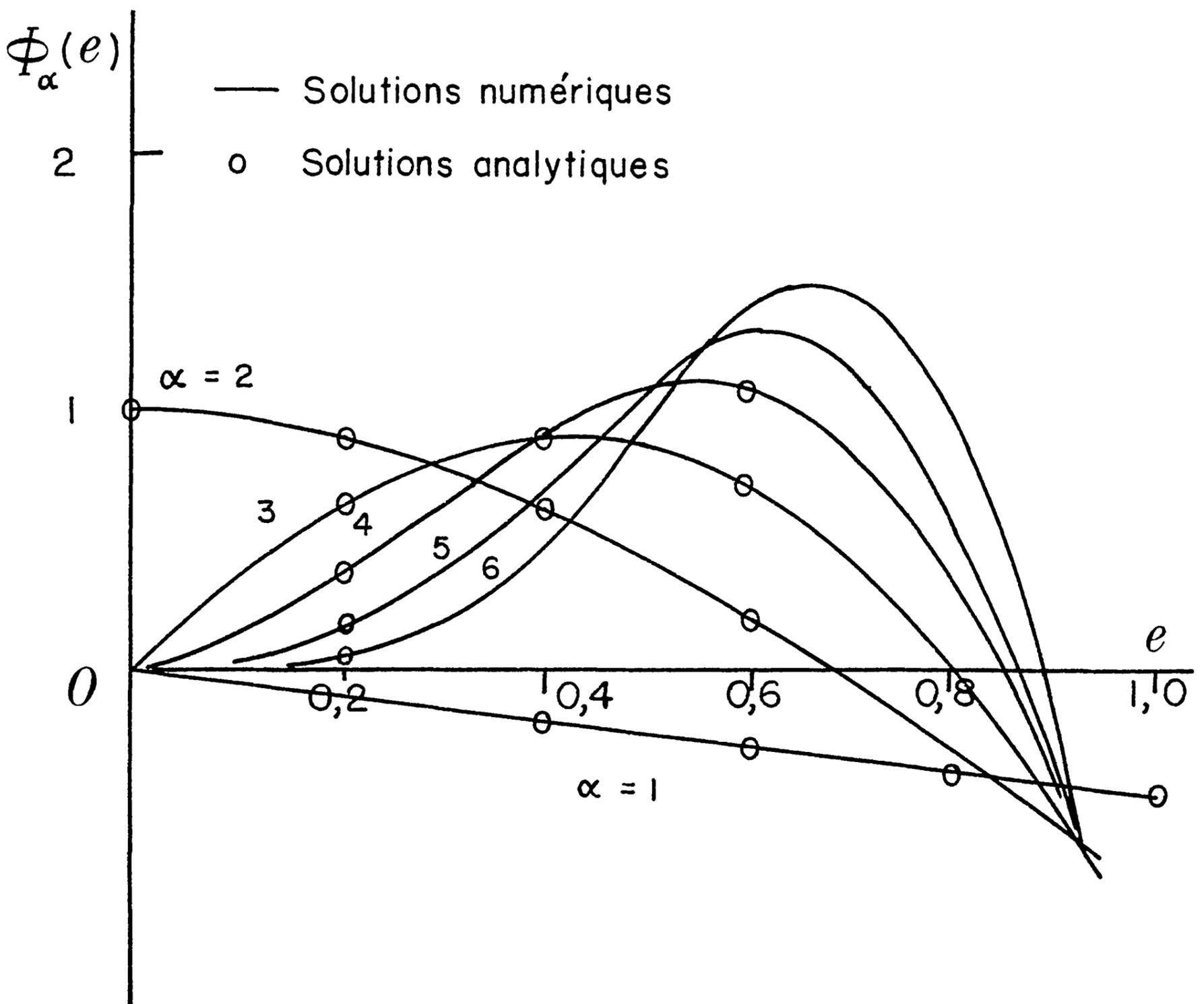


Fig. 4. Variations de  $\Phi_\alpha(e)$ ; pour  $\mu \sim 0$ , la condition de stabilité est  $\mu\Phi_\alpha(e) > 0$ .

La fonction  $\Phi_\alpha(e)$  est donc le terme constant dans le développement de  $(r/a)^{-2} \times \cos(2v - \alpha M)$  en série de Fourier en  $E$ . Nous avons donné l'expression sous forme explicite de ce développement par l'équation (41) de la première partie. Il suffit de tirer le terme constant de ce développement. Pour  $\alpha=2$ , nous avons

$$\Phi_2(e) = \frac{4\beta^2}{3e^2} \left[ 3J_0(2e) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(2k+1)(2k+3)\beta^{2k}J_{2k}(2e) - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)(2k+3)\beta^{2k+1}J_{2k+1}(2e) \right], \quad (13)$$

où  $\beta^k$  est donné par la formule (39) de la première partie.

Pour le cas de Mercure,  $\alpha=3$ , et nous avons

$$\Phi_3(e) = \frac{4\beta^2}{3e^2} \left[ 12\beta J_0(3e) + 3(1 - 10\beta^2)J_1(3e) + \beta \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(2k+3)\beta^{2k} \times [2(k+1)J_{2k}(3e) - (2k+5)\beta J_{2k+1}(3e)] \right]. \quad (14)$$

D'une manière générale, pour  $\alpha \geq 4$ , nous avons les expressions

#### A. $\alpha$ EST UN NOMBRE PAIR

$$\Phi_\alpha(e) = \frac{2}{3e^2} \left\{ \alpha(\alpha+1)\beta^\alpha [(\alpha-1)J_0(\alpha e) - (\alpha+2)\beta J_1(\alpha e)] + \sum_{k=1}^{(\alpha/2)-1} (\alpha-2k-1)(\alpha-2k)(\alpha-2k+1)\beta^{\alpha-2k}J_{2k}(\alpha e) + \sum_{k=0}^{(\alpha/2)-2} (\alpha-2k-2)(\alpha-2k-1)(\alpha-2k)\beta^{\alpha-2k-1}J_{2k+1}(\alpha e) + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha+2k)(\alpha+2k+1)\beta^{\alpha+2k} \times [(\alpha+2k-1)J_{2k}(\alpha e) - (\alpha+2k+2)\beta J_{2k+1}(\alpha e)] \right\}. \quad (15)$$

#### B. $\alpha$ EST UN NOMBRE IMPAIR

$$\Phi_\alpha(e) = \frac{2}{3e^2} \left\{ \alpha(\alpha+1)(\alpha-1)\beta^\alpha J_0(\alpha e) + \alpha [(\alpha-1)(\alpha-2) - (\alpha+1)(\alpha+2)\beta^2] \beta^{\alpha-1} J_1(\alpha e) + \sum_{k=1}^{(\alpha-3)/2} (\alpha-2k)(\alpha-2k-1)\beta^{\alpha-2k-1} \times [(\alpha-2k+1)\beta J_{2k}(\alpha e) + (\alpha-2k-2)J_{2k+1}(\alpha e)] + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha+2k)(\alpha+2k+1)\beta^{\alpha+2k} \times [(\alpha+2k-1)J_{2k}(\alpha e) - (\alpha+2k+2)\beta J_{2k+1}(\alpha e)] \right\}. \quad (16)$$

Sur la Figure 4, les valeurs de  $\Phi_\alpha(e)$  calculées par les séries (11) sont représentées par des petits cercles. On voit que les séries donnent une précision très bonne, même avec des valeurs larges de  $e$ . La connaissance de la valeur de  $\Phi_\alpha(e)$  est importante parce que, par l'équation (8) on voit immédiatement que la période des oscillations petites autour de la position d'équilibre  $\varphi = 0$  est de

$$P = \frac{P_0}{\sqrt{|\mu\Phi_\alpha(e)|}}, \quad (17)$$

où  $P_0$  est la période orbitale du satellite.

### 3. Courbe de stabilité emanant du point $e=0.682$ , $\mu=0$

C'est la courbe de résonance de l'équation aux variations (7). La solution  $\varphi^*$  a été donnée dans la première partie

$$\varphi^* = \mu\varphi_1(M) + \mu^2\varphi_2(M), \quad (18)$$

où  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont données par les séries (30) et (31) dans la première partie. L'équation aux variations (7) a la forme

$$\frac{d^2\xi}{dM^2} + b(M)\xi = 0, \quad (19)$$

où  $b(M)$  est une fonction périodique en  $M$ , et de période  $2\pi$ .

$$b(M) = \mu b_1(M) + \mu^2 b_2(M) + \mu^3 b_3(M) + \dots, \quad (20)$$

avec

$$\begin{aligned} b_1(M) &= \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \cos(2v - 2M), \\ b_2(M) &= \varphi_1(M) \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \sin(2v - 2M), \\ b_3(M) &= -\frac{1}{2}\varphi_1^2(M) \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \cos(2v - 2M) + \\ &\quad + \varphi_2(M) \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \sin(2v - 2M). \end{aligned} \quad (21)$$

En prenant seulement la première harmonique dans les solutions pour  $\varphi_1(M)$  et  $\varphi_2(M)$ , nous avons pour les fonctions  $b_i(M)$

$$\begin{aligned} b_1(M) &= (1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4 - \frac{35}{288}e^6) + 3e(1 - \frac{61}{24}e^2 + \frac{731}{576}e^4 - \frac{8005}{27648}e^6) \cos M, \\ b_2(M) &= -8e^2(1 - \frac{31}{16}e^2 + \frac{23}{24}e^4 - \frac{3931}{18432}e^6)^2 + \\ &\quad + 8e^2(1 - \frac{31}{16}e^2 + \frac{23}{24}e^4 - \frac{3931}{18432}e^6)^2 \cos 2M, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3(M) = & -4e^2 \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4 - \frac{35}{288}e^6\right) \left(1 - \frac{31}{16}e^2 + \frac{23}{24}e^4 - \frac{3931}{18432}e^6\right)^2 - \\
& -8e^2 \left(1 - \frac{31}{16}e^2 + \frac{23}{24}e^4 - \frac{3931}{18432}e^6\right) \times \\
& \times \left(1 - \frac{505}{64}e^2 + \frac{124445}{6912}e^4 - \frac{23752475}{1327104}e^6\right) - \\
& -6e^3 \left(1 - \frac{61}{24}e^2 + \frac{731}{576}e^4 - \frac{8005}{27648}e^6\right) \times \\
& \times \left(1 - \frac{31}{16}e^2 + \frac{23}{24}e^4 - \frac{3931}{18432}e^6\right)^2 \cos M + \\
& +4e^2 \left[\left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4 - \frac{35}{288}e^6\right) \left(1 - \frac{31}{16}e^2 + \frac{23}{24}e^4 - \frac{3931}{18432}e^6\right)^2 + \right. \\
& +2 \left(1 - \frac{31}{16}e^2 + \frac{23}{24}e^4 - \frac{3931}{18432}e^6\right) \times \\
& \times \left. \left(1 - \frac{505}{64}e^2 - \frac{124445}{6912}e^4 - \frac{23752475}{1327104}e^6\right)\right] \cos 2M + \\
& +6e^3 \left(1 - \frac{61}{24}e^2 + \frac{731}{576}e^4 - \frac{8005}{27648}e^6\right) \times \\
& \times \left(1 - \frac{31}{16}e^2 + \frac{23}{24}e^4 - \frac{3931}{18432}e^6\right)^2 \cos 3M.
\end{aligned} \tag{22}$$

La courbe de stabilité est la courbe le long de laquelle la solution de l'équation (19) est purement périodique et de même période que  $b(M)$  qui est ici  $2\pi$ . Donc, pour obtenir cette courbe limite de stabilité, il suffit de trouver la solution périodique de période  $2\pi$  pour  $\mu=0$ , et ensuite faire un prolongement analytique de cette solution pour des petites valeurs de  $\mu$ . L'équation aux variations (19) contient deux paramètres,  $\mu$  et  $e$ . Pour avoir des solutions périodiques de période  $2\pi$ , ces deux paramètres doivent satisfaire à une relation qui est l'équation de la courbe de stabilité.

Posons

$$e = e_0 + \mu e_1 + \mu^2 e_2 + \dots \tag{23}$$

Le problème est donc de calculer les coefficients numériques  $e_i$ . En substituant la série (23) dans les équations (22) nous avons

$$b_i(M) = b_{i0}(e_0, M) + \mu b_{i1}(e_0, e_1, M) + \mu^2 b_{i2}(e_0, e_1, e_2, M) + \dots \tag{24}$$

Pour bien comprendre notre méthode de récurrence, nous remarquons que le coefficient  $e_j$ ,  $j=1, 2, \dots$  est contenu linéairement dans la fonction  $b_{ij}(e_0, \dots, e_j, M)$ . Ce qui fait que, quand  $e_0$  est connu, les  $e_j$  seront obtenus par des relations linéaires simples. En employant (24), l'équation aux variations (19) devient

$$\xi'' + \left( \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k c_k(M) \right) \xi = 0, \tag{25}$$

avec les primes représentant des dérivées prises par rapport à  $M$ . Les fonctions  $c_k(M)$  sont données par

$$c_k(M) = b_{1(k-1)} + b_{2(k-2)} + \dots + b_{k0}. \tag{26}$$

D'une manière explicite nous avons

$$\begin{aligned}
c_1(M) = & \left(1 - \frac{5}{2}e_0^2 + \frac{13}{16}e_0^4 - \frac{35}{288}e_0^6\right) + 3e_0 \left(1 - \frac{61}{24}e_0^2 + \frac{731}{576}e_0^4 - \frac{8005}{27648}e_0^6\right) \cos M, \\
c_2(M) = & - \left[5e_0 e_1 \left(1 - \frac{13}{20}e_0^2 + \frac{7}{48}e_0^4\right) + 8e_0^2 \left(1 - \frac{31}{16}e_0^2 + \frac{23}{24}e_0^4 - \frac{3931}{18432}e_0^6\right)^2\right] + \\
& + 3e_1 \left(1 - \frac{183}{24}e_0^2 + \frac{3655}{576}e_0^4 - \frac{56035}{27648}e_0^6\right) \cos M + \\
& + 8e_0^2 \left(1 - \frac{31}{16}e_0^2 + \frac{23}{24}e_0^4 - \frac{3931}{18432}e_0^6\right)^2 \cos 2M,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_3(M) = & - \left[ 5e_0e_2 \left( 1 - \frac{13}{20}e_0^2 + \frac{7}{48}e_0^4 \right) + \frac{5e_1^2}{2} \left( 1 - \frac{39}{20}e_0^2 + \frac{35}{48}e_0^4 \right) + \right. \\
 & + 16e_0e_1 \left( 1 - \frac{31}{16}e_0^2 + \frac{23}{24}e_0^4 - \frac{3931}{18432}e_0^6 \right) \left( 1 - \frac{93}{16}e_0^2 + \frac{115}{24}e_0^4 - \frac{27517}{18432}e_0^6 \right) + \\
 & + 4e_0^2 \left( 1 - \frac{5}{2}e_0^2 + \frac{13}{16}e_0^4 - \frac{35}{288}e_0^6 \right) \left( 1 - \frac{31}{16}e_0^2 + \frac{23}{24}e_0^4 - \frac{3931}{18432}e_0^6 \right)^2 + \\
 & + 8e_0^2 \left( 1 - \frac{31}{16}e_0^2 + \frac{23}{24}e_0^4 - \frac{3931}{18432}e_0^6 \right) \times \\
 & \times \left( 1 - \frac{505}{64}e_0^2 + \frac{124445}{6912}e_0^4 - \frac{23752475}{1327104}e_0^6 \right) \left. \right] + \\
 & + \left[ 3e_2 \left( 1 - \frac{183}{24}e_0^2 + \frac{3655}{576}e_0^4 - \frac{56035}{27648}e_0^6 \right) - \right. \\
 & - \frac{183}{8}e_0e_1^2 \left( 1 - \frac{3655}{2196}e_0^2 + \frac{56035}{70272}e_0^4 \right) - \\
 & - 6e_0^3 \left( 1 - \frac{61}{24}e_0^2 + \frac{731}{576}e_0^4 - \frac{8005}{27648}e_0^6 \right) \times \\
 & \times \left( 1 - \frac{31}{16}e_0^2 + \frac{23}{24}e_0^4 - \frac{3931}{18432}e_0^6 \right)^2 \left. \right] \cos M + \\
 & + 4e_0 \left[ 4e_1 \left( 1 - \frac{31}{16}e_0^2 + \frac{23}{24}e_0^4 - \frac{3931}{18432}e_0^6 \right) \times \right. \\
 & \times \left( 1 - \frac{93}{16}e_0^2 + \frac{115}{24}e_0^4 - \frac{27517}{18432}e_0^6 \right) + \\
 & + e_0 \left( 1 - \frac{5}{2}e_0^2 + \frac{13}{16}e_0^4 - \frac{35}{288}e_0^6 \right) \left( 1 - \frac{31}{16}e_0^2 + \frac{23}{24}e_0^4 - \frac{3931}{18432}e_0^6 \right)^2 + \\
 & + 2e_0 \left( 1 - \frac{31}{16}e_0^2 + \frac{23}{24}e_0^4 - \frac{3931}{18432}e_0^6 \right) \times \\
 & \times \left( 1 - \frac{505}{64}e_0^2 + \frac{124445}{6912}e_0^4 - \frac{23752475}{1327104}e_0^6 \right) \left. \right] \cos 2M + \\
 & + 6e_0^3 \left( 1 - \frac{61}{24}e_0^2 + \frac{731}{576}e_0^4 - \frac{8005}{27648}e_0^6 \right) \times \\
 & \times \left( 1 - \frac{31}{16}e_0^2 + \frac{23}{24}e_0^4 - \frac{3931}{18432}e_0^6 \right)^2 \cos 3M. \tag{27}
 \end{aligned}$$

Nous cherchons la solution périodique de l'équation (25) sous la forme

$$\xi = \xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \mu^3\xi_3 + \dots, \tag{28}$$

où les  $\xi_i(M)$  sont des fonctions périodiques de  $M$  et de période  $2\pi$ . En substituant cette solution dans (25) et en égalant à zéro les coefficients de même puissance de  $\mu$ , nous avons le système d'équations

$$\begin{aligned}
 \xi_0'' &= 0, \\
 \xi_1'' + c_1(M) \xi_0 &= 0, \\
 \xi_2'' + c_2(M) \xi_0 + c_1(M) \xi_1 &= 0, \\
 \xi_3'' + c_3(M) \xi_0 + c_2(M) \xi_1 + c_1(M) \xi_2 &= 0, \\
 \dots & \\
 \xi_i'' + c_i(M) \xi_0 + \dots + c_1(M) \xi_{i-1} &= 0. \\
 \dots &
 \end{aligned} \tag{29}$$

L'intégration de la première équation donne

$$\xi_0(M) = AM + B, \tag{30}$$

dù  $A$  et  $B$  sont deux constantes d'intégration. Pour avoir une solution périodique nous oevons prendre  $A=0$ , et en prenant  $B=1$  nous avons simplement changé l'échelle des

amplitudes. Donc

$$\xi_0 = 1. \quad (31)$$

L'équation en  $\xi_1$  devient

$$\xi_1'' + c_1(M) = 0, \quad (32)$$

où le coefficient  $c_1(M)$  est donné par la première équation (27). Pour obtenir une solution périodique de l'équation (32) il faut choisir le paramètre dans  $c_1(M)$  pour que le terme constant soit nul. Nous avons donc

$$1 - \frac{5}{2}e_0^2 + \frac{13}{16}e_0^4 - \frac{35}{288}e_0^6 + \dots = 0. \quad (33)$$

Le premier membre est le développement de  $\Phi_2(e_0)$ . Cette équation a la racine

$$e_0 = 0.682 \dots. \quad (34)$$

Avec cette valeur de  $e_0$  nous pouvons intégrer l'équation (32) pour avoir

$$\xi_1(M) = 3e_0 \left(1 - \frac{61}{24}e_0^2 + \frac{731}{576}e_0^4 - \frac{8005}{27648}e_0^6\right) \cos M, \quad (35)$$

avec bien entendu la valeur de  $e_0 = 0.682$ . Avec  $\xi_0$  et  $\xi_1$  nous avons maintenant l'équation en  $\xi_2$

$$\begin{aligned} \xi_2'' - & \left[ 5e_0e_1 \left(1 - \frac{13}{20}e_0^2 + \frac{7}{48}e_0^4\right) + 8e_0^2 \left(1 - \frac{31}{16}e_0^2 + \frac{23}{24}e_0^4 - \frac{3931}{18432}e_0^6\right)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{9e_0^2}{2} \left(1 - \frac{61}{24}e_0^2 + \frac{731}{576}e_0^4 - \frac{8005}{27648}e_0^6\right)^2 \right] + \\ & + 3e_1 \left(1 - \frac{183}{24}e_0^2 + \frac{3655}{576}e_0^4 - \frac{56035}{27648}e_0^6\right) \cos M + \\ & + \left[ \frac{9e_0^2}{2} \left(1 - \frac{61}{24}e_0^2 + \frac{731}{576}e_0^4 - \frac{8005}{27648}e_0^6\right)^2 + \right. \\ & \left. + 8e_0^2 \left(1 - \frac{31}{16}e_0^2 + \frac{23}{24}e_0^4 - \frac{3931}{18432}e_0^6\right)^2 \right] \cos 2M. \quad (36) \end{aligned}$$

Pour obtenir une solution périodique pour  $\xi_2$ , il faut et il suffit que le terme constant de cette équation soit égal à zéro. Nous avons donc pour l'équation en  $e_1$

$$\begin{aligned} 5 \left(1 - \frac{13}{20}e_0^2 + \frac{7}{48}e_0^4\right) e_1 = & \frac{9e_0}{2} \left(1 - \frac{61}{24}e_0^2 + \frac{731}{576}e_0^4 - \frac{8005}{27648}e_0^6\right)^2 - \\ & - 8e_0 \left(1 - \frac{31}{16}e_0^2 + \frac{23}{24}e_0^4 - \frac{3931}{18432}e_0^6\right)^2. \quad (37) \end{aligned}$$

Avec la valeur de  $e_0$  déjà calculée, nous obtenons

$$e_1 = -0.118. \quad (38)$$

Ce coefficient représente la pente de la courbe limite de stabilité au point  $\mu = 0$ . La valeur donne une précision remarquable avec l'échelle employée pour tracer la

Figure 3. Avec cette valeur de  $e_1$  qui annule le terme constant, l'intégration de l'équation (36) nous donne la solution périodique pour  $\xi_2$  qui s'écrit

$$\begin{aligned} \xi_2(M) = & 3e_1 \left( 1 - \frac{183}{24}e_0^2 + \frac{3655}{576}e_0^4 - \frac{56035}{27648}e_0^6 \right) \cos M + \\ & + \left[ \frac{9e_0^2}{8} \left( 1 - \frac{61}{24}e_0^2 + \frac{731}{576}e_0^4 - \frac{8005}{27648}e_0^6 \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2e_0^2 \left( 1 - \frac{31}{16}e_0^2 + \frac{23}{24}e_0^4 - \frac{3931}{18432}e_0^6 \right)^2 \right] \cos 2M. \end{aligned} \quad (39)$$

L'intégration littérale peut continuer ainsi indéfiniment. Comme il est inutile de continuer d'écrire les équations avec les paramètres  $e_0$  et  $e_1$  qui sont déjà connus, nous allons écrire l'équation in  $\xi_3$  avec des coefficients numériques. Tout d'abord nous avons

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 1, \\ \xi_1 &= 0.1294 \cos M, \\ \xi_2 &= 0.4877 \cos M + 0.0775 \cos 2M, \end{aligned} \quad (40)$$

et pour les coefficients  $c_i(M)$

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.1294 \cos M, \\ c_2 &= -0.0081 + 0.4877 \cos M + 0.3016 \cos 2M, \\ c_3 &= - (2.48667e_2 - 0.30198) - \\ & - (4.13304e_2 + 0.09629) \cos M - \\ & - 0.31066 \cos 2M + 0.00976 \cos 3M. \end{aligned} \quad (41)$$

En substituant dans l'équation en  $\xi_3$ , nous avons

$$\begin{aligned} \xi_3'' &= -2.48667e_2 + 0.36509 - (4.13304e_2 + 0.07281) \cos M - \\ & - 0.24755 \cos 2M + 0.03429 \cos 3M = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

En annulant le terme constant dans cette équation nous avons

$$e_2 = 0.147. \quad (43)$$

Avec cette valeur de  $e_2$ , l'intégration de (42) nous donne

$$\xi_3 = -0.6804 \cos M - 0.0619 \cos 2M + 0.0038 \cos 3M. \quad (44)$$

Nous avons donc l'équation de la courbe limite de stabilité émanant du point  $e=0.682$ ,  $\mu=0$

$$e = 0.682 - 0.118\mu + 0.147\mu^2 + \dots. \quad (45)$$

Sur la Figure 3, nous avons représenté cette solution par une ligne pointillée.

#### 4. Courbes limites de stabilité pour $e \approx 0$

Il est plus facile d'obtenir les courbes limites de stabilité émanant des points de résonance sur l'axe des  $\mu$ . Ces valeurs de  $\mu$  satisfont à la relation

$$\mu = \left(\frac{n}{2}\right)^2, \quad (46)$$

où  $n$  est un nombre entier. La courbe qui part de  $\mu = 1$  est la courbe de bifurcation dont les équations paramétriques approchées ont été données par (76) et (77) dans la première partie. Avec l'échelle de la Figure 3, la solution analytique s'accorde très bien avec les résultats numériques. Nous allons dériver les équations des courbes de résonance qui partent des points  $e = 0, \mu = \frac{1}{4}$  et  $e = 0, \mu = \frac{9}{4}$ . A cause de la restriction physique de  $\mu$ , il n'y a pas d'autres courbes de résonance.

Pour des valeurs assez petites de  $e$ , nous employons les solutions périodiques (50) dans la première partie. Pour étudier leur stabilité nous écrivons

$$x = x^* + \xi, \quad (47)$$

où  $x^*$  est la solution périodique considérée et  $\xi$  une petite déviation de cette solution. En substituant dans l'équation (1) dans la première partie et en linéarisant l'équation obtenue, nous avons l'équation aux variations

$$(1 + e \cos v) \frac{d^2 \xi}{dv^2} - 2e \sin v \frac{d\xi}{dv} + (\mu \cos x^*) \xi = 0. \quad (48)$$

L'équation peut être mise sous la forme normale par le changement de variable

$$\xi = \frac{y}{1 + e \cos v}. \quad (49)$$

Nous avons la nouvelle équation

$$(1 + e \cos v) \frac{d^2 y}{dv^2} + (\mu \cos x^* + e \cos v) y = 0. \quad (50)$$

De nouveau, quand  $x^*$  est remplacée par son expression analytique (I. 50) nous avons une équation de Hill. Les courbes de résonance, ou courbes limites de stabilité, sont les courbes le long desquelles l'équation (50) a des solutions purement périodiques. Nous les obtenons par un prolongement analytique des solutions périodiques obtenues avec  $e = 0, \mu = m^2, (m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ .

Soit

$$\mu = m^2 + \mu_1 e + \mu_2 e^2 + \mu_3 e^3 + \dots. \quad (51)$$

l'équation de ces courbes dans l'espace  $(\mu, e)$ . Les coefficients numériques  $\mu_i$  sont à

trouver pour rendre les solutions de (50) purement périodiques. Avec les équations (50) dans la première partie, l'équation aux variations (50) s'écrit

$$(1 + e \cos v) \frac{d^2 y}{dv^2} + b(e, v) y = 0, \quad (52)$$

où le coefficient  $b(e, v)$  contient les paramètres  $\mu_i$  et a la forme d'une série convergente en  $e$

$$b(e, v) = \sum_{i=0}^{\infty} e^i b_i(v). \quad (53)$$

Les  $b_i(v)$  sont des fonctions périodiques en  $v$ , de période  $2\pi$ . En plus, le coefficient  $\mu_i$  que nous voulons calculer ne se figure que dans les coefficients  $b_i(v)$  et suivants et de façon qu'il est possible de le déterminer successivement.

D'une manière explicite, nous avons jusqu'à  $b_4(v)$

$$\begin{aligned} b_0 &= m^2, \\ b_1 &= \mu_1 + \cos v, \\ b_2 &= \mu_2 - \frac{4m^2}{(m^2 - 1)^2} + \frac{4m^2}{(m^2 - 1)^2} \cos 2v, \\ b_3 &= \mu_3 + \frac{4(m^2 + 1)}{(m^2 - 1)^3} \mu_1 - \frac{12m^2}{(m^2 - 1)^2 (m^2 - 4)} \cos v - \\ &\quad - \frac{4(m^2 + 1)}{(m^2 - 1)^3} \mu_1 \cos 2v + \frac{12m^2}{(m^2 - 1)^2 (m^2 - 4)} \cos 3v, \\ b_4 &= \mu_4 - \frac{9m^2}{(m^2 - 1)^2 (m^2 - 4)^2} - \frac{4m^2 (3m^2 + 1)}{(m^2 - 1)^5} - \\ &\quad - \frac{4[(m^2 + 2) \mu_1^2 - (m^2 - 1)(m^2 + 1) \mu_2]}{(m^2 - 1)^4} + \\ &\quad + \frac{24(m^4 - 2m^2 - 2)}{(m^2 - 1)^3 (m^2 - 4)^2} \mu_1 \cos v + \\ &\quad + \left[ \frac{4m^2 (3m^2 + 1)}{(m^2 - 1)^5} - \frac{4m^2 (11m^4 - 23m^2 + 24)}{(m^2 - 1)^4 (m^2 - 4)(m^2 - 9)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4[(m^2 + 2) \mu_1^2 - (m^2 - 1)(m^2 + 1) \mu_2]}{(m^2 - 1)^4} \right] \cos 2v - \\ &\quad - \frac{24(m^4 - 2m^2 - 2)}{(m^2 - 1)^3 (m^2 - 4)^2} \mu_1 \cos 3v + \\ &\quad + \left[ \frac{9m^2}{(m^2 - 1)^2 (m^2 - 4)^2} + \frac{4m^2 (11m^4 - 23m^2 + 24)}{(m^2 - 1)^4 (m^2 - 4)(m^2 - 9)} \right] \cos 4v. \end{aligned} \quad (54)$$

Quoiqu'il est possible de retenir le paramètre  $m^2$ , et ensuite de dériver l'expression

générale pour les courbes de stabilité, il est plus simple d'effectuer les intégrations successives avec des valeurs spécifiées de  $m^2$  qui sont ici  $m^2 = \frac{1}{4}$  et  $m^2 = \frac{9}{4}$ .

Avec  $m^2 = \frac{1}{4}$ , nous avons pour les coefficients  $b_i(v)$

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \frac{1}{4}, \\
 b_1 &= \mu_1 + \cos v, \\
 b_2 &= \mu_2 - \frac{1.6}{9} + \frac{1.6}{9} \cos 2v, \\
 b_3 &= \mu_3 - \frac{3.20}{2.7} \mu_1 + \frac{6.4}{4.5} \cos v + \frac{3.20}{2.7} \mu_1 \cos 2v - \frac{6.4}{4.5} \cos 3v, \\
 b_4 &= \mu_4 + \frac{4.3072}{6.075} - \frac{2.56}{9} \mu_1^2 - \frac{3.20}{2.7} \mu_2 + \\
 &\quad + \frac{6.656}{6.75} \mu_1 \cos v + \left( \frac{2.56}{9} \mu_1^2 + \frac{3.20}{2.7} \mu_2 - \frac{3.91168}{4.2525} \right) \cos 2v - \\
 &\quad - \frac{6.656}{6.75} \mu_1 \cos 3v + \frac{2.9888}{1.4175} \cos 4v.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Nous cherchons la solution périodique de (52) sous la forme

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} e^i y_i(v), \tag{56}$$

où les  $y_i(v)$  sont des fonctions périodiques en  $v$  et de période  $2\pi/m$ . En substituant (56) dans (52) et en égalant les coefficients de même puissance en  $e$  nous avons

$$\begin{aligned}
 y_0'' + b_0 y_0 &= 0, \\
 y_1'' + b_0 y_1 + y_0'' \cos v + b_1 y_0 &= 0, \\
 y_2'' + b_0 y_2 + y_1'' \cos v + b_2 y_0 + b_1 y_1 &= 0, \\
 y_3'' + b_0 y_3 + y_2'' \cos v + b_3 y_0 + b_2 y_1 + b_1 y_2 &= 0, \\
 y_4'' + b_0 y_4 + y_3'' \cos v + b_4 y_0 + b_3 y_1 + b_2 y_2 + b_1 y_3 &= 0, \\
 \dots \\
 y_i'' + b_0 y_i + y_{i-1}'' \cos v + b_i y_0 + b_{i-1} y_1 + \dots + b_1 y_{i-1} &= 0. \\
 \dots
 \end{aligned} \tag{57}$$

L'intégration de la première équation donne

$$y_0(v) = A \cos \frac{v}{2} + B \sin \frac{v}{2}. \tag{58}$$

En prenant  $A=1$ ,  $B=0$  nous pouvons générer la première solution périodique fondamentale de l'équation (52). Donc

$$y_0 = \cos \frac{v}{2}. \tag{59}$$

Avec cette valeur de  $y_0$ , l'équation en  $y_1$  s'écrit

$$y_1'' + \frac{1}{4} y_1 + \left( \mu_1 + \frac{3}{8} \right) \cos \frac{v}{2} + \frac{3}{8} \cos \frac{3v}{2} = 0. \tag{60}$$

Pour obtenir une solution périodique de cette equation nous devons annuler le coeffi-

cient de  $\cos v/2$ . Donc, il faut prendre

$$\mu_1 = -\frac{3}{8}. \quad (61)$$

Nous pouvons adopter la convention que le coefficient du terme  $\cos v/2$  dans la solution (56) est l'unité. Donc dans les intégrations suivantes, il suffit d'évaluer les intégrales particulières pour les équations en  $y_i$ . Avec  $\mu_1$  donné par (61), nous intégrons (60) pour obtenir

$$y_1 = \frac{3}{16} \cos \frac{3v}{2}. \quad (62)$$

Avec les fonctions trouvées, l'équation en  $y_2$  devient

$$y_2'' + \frac{1}{4}y_2 + \left(\mu_2 - \frac{2183}{1152}\right) \cos \frac{v}{2} + \frac{943}{1152} \cos \frac{3v}{2} + \frac{889}{1152} \cos \frac{5v}{2} = 0. \quad (63)$$

Comme avant, il faut annuler le coefficient de  $\cos v/2$ . Donc

$$\mu_2 = \frac{2183}{1152}, \quad (64)$$

et la solution obtenue pour  $y_2$  est de

$$y_2 = \frac{943}{2304} \cos \frac{3v}{2} + \frac{889}{6912} \cos \frac{5v}{2}. \quad (65)$$

Il est inutile de continuer ainsi la discussion et nous donnons le résultat suivant.

Pour la courbe de stabilité

$$\mu = \frac{1}{4} - \frac{3}{8}e + \frac{2183}{1152}e^2 - \frac{466921}{92160}e^3 + \frac{162469903}{7962624}e^4 - \dots. \quad (66)$$

Le long de cette courbe, la solution périodique paire de l'équation aux variations, à un coefficient près, est de

$$y = \cos \frac{v}{2} + \frac{3e}{16} \cos \frac{3v}{2} + e^2 \left( \frac{943}{2304} \cos \frac{3v}{2} + \frac{889}{6912} \cos \frac{5v}{2} \right) - e^3 \left( \frac{60833}{61440} \cos \frac{3v}{2} + \frac{24863}{46080} \cos \frac{5v}{2} + \frac{27097}{368640} \cos \frac{7v}{2} \right) + \dots. \quad (67)$$

L'équation (66) correspond à la branche inférieure de la courbe de résonance. Pour obtenir l'équation de la branche supérieure, nous cherchons la solution périodique impaire de (52), en sinus des multiples de  $v/2$ . Par la même méthode, nous obtenons

$$\mu = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}e + \frac{2183}{1152}e^2 + \frac{466921}{92160}e^3 + \frac{162469903}{7962624}e^4 + \dots. \quad (68)$$

La solution périodique le long de cette courbe est de

$$y = \sin \frac{v}{2} + \frac{3e}{16} \sin \frac{3v}{2} - e^2 \left( \frac{943}{2304} \sin \frac{3v}{2} - \frac{889}{6912} \sin \frac{5v}{2} \right) - e^3 \left( \frac{60833}{61440} \sin \frac{3v}{2} - \frac{24863}{46080} \sin \frac{5v}{2} + \frac{27097}{368640} \sin \frac{7v}{2} \right) + \dots. \quad (69)$$

Pour la courbe de stabilité émanant du point  $e=0$ ,  $\mu=\frac{9}{4}$ , nous prenons  $m^2=\frac{9}{4}$ . Les coefficients  $b_i(v)$  deviennent

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{9}{4}, \\ b_1 &= \mu_1 + \cos v, \\ b_2 &= \mu_2 - \frac{144}{25} + \frac{144}{25} \cos 2v, \\ b_3 &= \mu_3 + \frac{832}{125}\mu_1 + \frac{1728}{175} \cos v - \frac{832}{125}\mu_1 \cos 2v - \frac{1728}{175} \cos 3v, \\ b_4 &= \mu_4 - \frac{4147776}{153125} - \frac{4352}{625}\mu_1^2 + \frac{832}{125}\mu_2 - \\ &\quad - \frac{35328}{6125}\mu_1 \cos v + \left[ \frac{309248}{21875} + \frac{4352}{625}\mu_1^2 - \frac{832}{125}\mu_2 \right] \cos 2v + \\ &\quad + \frac{35328}{6125}\mu_1 \cos 3v + \frac{396608}{30625} \cos 4v. \end{aligned} \quad (70)$$

En opérant de la même manière, nous avons l'équation de la courbe de stabilité

$$\mu = \frac{9}{4} + \frac{33489}{6400}e^2 \pm \frac{1648323}{358400}e^3 - \frac{71002992771}{40140800000}e^4 + \dots \quad (71)$$

Le long de la branche supérieure de la courbe, nous avons la solution

$$\begin{aligned} y &= \cos \frac{3v}{2} + \frac{5e}{16} \left( \cos \frac{v}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{5v}{2} \right) - e^2 \left( \frac{9591}{6400} \cos \frac{v}{2} - \frac{21057}{64000} \cos \frac{7v}{2} \right) - \\ &\quad - e^3 \left( \frac{2695437}{1433600} \cos \frac{v}{2} - \frac{5833071}{5734400} \cos \frac{5v}{2} + \frac{115291}{286720} \cos \frac{9v}{2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (72)$$

En prenant la branche inférieure, nous avons la solution périodique impaire

$$\begin{aligned} y &= \sin \frac{3v}{2} + \frac{5e}{16} \left( \sin \frac{v}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{5v}{2} \right) + e^2 \left( \frac{9591}{6400} \sin \frac{v}{2} + \frac{21057}{64000} \sin \frac{7v}{2} \right) - \\ &\quad - e^3 \left( \frac{2695437}{1433600} \sin \frac{v}{2} - \frac{5833071}{5734400} \sin \frac{5v}{2} + \frac{115291}{286720} \sin \frac{9v}{2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (73)$$

Les courbes de stabilité obtenues avec les solutions analytiques (66), (68) et (71) sont dessinées en lignes pointillées sur la Figure 3. A cause de la forme compliquée de la courbe issue du point  $e=0$ ,  $\mu=\frac{9}{4}$ , les solutions sont en agrément avec les solutions numériques seulement pour des valeurs petites de  $e$ , surtout pour la branche supérieure de la courbe. Pour la branche inférieure, jusqu'à la valeur de  $e=0.2$ , en prenant la série (66), les valeurs obtenues s'accordent très bien avec les valeurs obtenues numériquement. Après cette valeur, les courbes obtenues analytiquement et numériquement s'écartent quoique l'allure générale de la courbe obtenue analytiquement est correcte. D'autre part, si l'on prend seulement la série (66) jusqu'à l'ordre de  $e^3$ , le résultat est satisfaisant jusqu'à la valeur de  $e=0.5$ . Ce qui donne à penser que la série obtenue est divergente pour des valeurs assez larges de l'excentricité. En prenant la série (66), si l'on calcule la valeur de  $e$  pour que les termes du troisième et du quatrième ordre s'annulent l'un l'autre, on trouve  $e \approx 0.24$ .

Nous observons aussi que la partie haute de la courbe de stabilité émanant du point  $e=0$ ,  $\mu=\frac{9}{4}$  correspond à des valeurs de  $\mu$  plus grandes que 1. Donc, pour obtenir l'équation approchée de cette partie de la courbe, il faut utiliser les solutions périodi-

ques de type C, c'est à dire les solutions (59) dans la première partie avec des valeurs négatives pour  $\varepsilon$ .

Pour la courbe de stabilité émanant du point  $e=0$ ,  $\mu=\frac{9}{4}$ , la solution analytique (71) donne des résultats très précis jusqu'à la valeur limite  $\mu=3$  du paramètre d'inertie.

Il est aussi utile de mentionner que Beletskii a donné dans son ouvrage (1966) les solutions

$$\mu = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{8}e, \quad (74)$$

pour la courbe de stabilité issue du point  $e=0$ ,  $\mu=\frac{1}{4}$ , et

$$\mu = \frac{9}{4} + \frac{1227}{200}e^2 \pm \frac{74853}{51200}e^3, \quad (75)$$

pour la courbe issue du point  $e=0$ ,  $\mu=\frac{9}{4}$ . Il a obtenu ces résultats par la méthode asymptotique. En retenant seulement le troisième ordre en  $e$  dans notre série (71) on peut vérifier que, déjà, elle donne un résultat meilleur que la série (75) de Beletskii.

### Références

- Beletskii, V. V.: 1966, 'Motion of an Artificial Satellite About Its Center of Mass', NASA TTF-429.  
 Chernousko, F. F.: 1963, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.* **3**, 699–713.  
 Deprit, A. et Rom, A. R. M.: 1967, *Bull. Astron.* **2**, Fasc. 3, 425–447.  
 Jefferys, W. H.: 1966, *Science*, No. 151, 1384.  
 Kovalevsky, J.: 1963, *Introduction à la Mécanique Céleste*, Librairie Armand Colin, Paris.  
 Liu, F. C.: 1971, *AIAA J.* **9**, 1240–1244.  
 Liu, H. S. et O'Keeffe, J. A.: 1965, *Science*, No. 150, 1717.  
 Lutze, F. H. Jr. et Abbitt, M. W. Jr.: 1969, *Celes. Mech.* **1**, 31–35.  
 Modi, V. J. et Brereton, R. C.: 1969, *AIAA J.* **7**, 1217–1225.  
 Moulton, F. R.: 1920, *Periodic Orbits*, Cargenie Inst. of Washington, Washington D.C.  
 Pacault, R.: 1969, 'Synchronisme de la Rotation et du Mouvement Orbital des Planètes (Mercure) et des Satellites', Note scientifique, ESRO, No. SN-92.  
 Torzhevskii, A. P.: 1964, *Kosm. Issled.*, Tome 2, No. 5, 667–678.  
 Vinh, N. X.: 1970, *Celes. Mech.* **2**, 64–76.  
 Zlatoustov, V. A., Okhotsimskii, D. E., Sarychev, V. A., et Torzhevskii, A. P.: 1964, *Kosm. Issled.* Tome 2, No. 5, 658–666.