Über die gleichzeitige Wirkung von gekreuzten homogenen elektrischen und magnetischen Feldern auf das Wasserstoffatom. I.

Von **Oskar Klein** in Ann Arbon (Michigan).

(Eingegangen am 23. Januar 1924.)

Einleitung. Die Frage nach der gleichzeitigen Wirkung eines homogenen elektrischen und eines homogenen magnetischen Feldes auf das Wasserstoffatom, deren Richtungen einen beliebigen Winkel miteinander bilden, ist von mehreren Seiten diskutiert worden [1]). Während jedes Feld für sich, wenn man die kleinen von der Relativitätstheorie geforderten Abweichungen von den Gesetzen der gewöhnlichen Mechanik vernachlässigt, in erster Annäherung rein periodische säkulare Störungen in der Bewegung des Elektrons hervorruft, schien die entsprechende Bewegung bei der Anwesenheit beider Felder von komplizierterer Beschaffenheit zu sein. Es lag sogar nahe, zu vermuten, daß diese Störungen einen völlig unperiodischen Charakter besitzen, was nach den Prinzipien der Quantentheorie zur Folge haben würde, daß keine wohldefinierten stationären Zustände vorhanden sein könnten [1]). Epstein hat jedoch angegeben [2]), daß es ihm gelungen ist, mit Hilfe der Methoden der Störungsrechnung zu beweisen, daß auch die fraglichen Störungen von mehrfach periodischem Charakter sind, und neuerdings hat er eine kurze Mitteilung über seine Resultate veröffentlicht [3]). Zu demselben Resultat ist neulich Halpern [4]) gekommen, der die Lösung des Problems als eine unendliche Reihe darstellt, deren Konvergenz er behauptet. Wie im folgenden gezeigt wird, kann man jedoch in sehr einfacher Weise die Lösung des Problems in der von Epstein angegebenen geschlossenen Form erhalten, wodurch gleichzeitig der Charakter der Bewegung deutlicher zum Vorschein kommt. Die hierbei benutzte Methode entspricht derjenigen, die Bohr zur Berechnung des Starkeffekts angewandt [5]) hat

---

[1]) N. Bohr, On the quantum theory of line spectra, Part II, S. 93 Det Kgl. Danske Vid. Selsk. Skr. 8. Raekke IV, 1. Deutsche Übersetzung im Verlag Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges. 1922. Siehe auch M. Born und W. Pauli, ZS. f. Phys. **10**, 137, 1922.

[2]) P. Epstein, ZS. f. Phys. **8**, 319, 1922.

[3]) P. Epstein, Phys. Rev. **22**, 202, 1923.

[4]) O. Halpern, ebenda **18**, 287, 1923.

[5]) N. Bohr, l. c., S. 71; deutsche Übersetzung S. 101.

und die bekanntlich in überaus einfacher und schöner Weise diese Erscheinung zu berechnen gestattet.

Die folgende Mitteilung enthält die Berechnung der säkularen Störungen und die daraus folgende Bestimmung der stationären Zustände bei dem in Frage stehenden System. In einigen weiteren Noten, die ich hoffe bald veröffentlichen zu können, werden einige Betrachtungen über das Verhalten des Systems bei adiabatischen Veränderungen der äußeren Felder, über die Intensitäten und Polarisationen der betreffenden Spektrallinien, samt der Behandlung einiger weiterer Fälle mittels einer ähnlichen Methode mitgeteilt.

§ 1. Die säkularen Störungen. Wir betrachten ein Atomsystem, das aus einem ruhenden Kern (unendliche Masse) mit der Ladung Ne und einem Elektron von der Masse m und der Ladung $-e$ besteht. Auf dieses Atom wirke ein homogenes elektrisches und ein homogenes magnetisches Feld, deren Intensitäten durch die beiden Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ repräsentiert werden mögen. Diese Intensitäten nehmen wir so groß an, daß die Relativitätsmodifikationen vernachlässigt werden können. Um die säkularen Störungen in der sonst rein periodischen Bewegung des Elektrons um den Kern zu berechnen, welche von den äußeren Kraftfeldern hervorgerufen werden, bedienen wir uns nicht der kanonischen Störungsgleichungen, sondern schlagen den folgenden direkten Weg ein. Es möge $\mathfrak{r}$ den vom Kern zum Elektron gezogenen Radiusvektor bezeichnen. Die Bewegungsgleichungen für das Elektron können dann in die folgende Vektorgleichung zusammengefaßt werden:

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = Ne^2 \operatorname{grad}\frac{1}{|\mathfrak{r}|} - e\mathfrak{E} + \frac{e}{c}\left[\mathfrak{H}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right], \tag{1}$$

wo $|\mathfrak{r}|$ die absolute Größe des Vektors $\mathfrak{r}$ bezeichnet, und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Aus dieser Gleichung wollen wir die Gleichungen für die durch die äußeren Felder bewirkten säkularen Störungen in der ersten Annäherung ableiten, d. h. unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung als die erste in den Feldstärken. Dies ist natürlich nur dann berechtigt, wenn das zweite und dritte Glied auf der rechten Seite der Gleichung (1) im Vergleich zu dem ersten Glied sehr klein sind. Bekanntlich ist dies wegen der Kleinheit der Elektronenbahn bis zu sehr großen Werten der Feldstärken der Fall.

In der ungestörten Bewegung unseres Systems treten, da die Anzahl von Freiheitsgraden 3 ist, sechs unabhängige Integrationskonstanten auf. Das Problem der Störungsrechnung besteht darin, die Abhängigkeit dieser Konstanten (d. h. derjenigen Funktionen der Lage und der Geschwindigkeitskomponenten, die bei der ungestörten Bewegung von der Zeit unabhängig sind) von der Zeit in der gestörten Bewegung zu bestimmen. Als solche Integrationskonstanten wählen wir erstens den Vektor, der das Winkelmoment des Elektrons um den Kern repräsentiert (drei Größen). Zweitens wählen wir hierzu den von dem Kern zu dem sogenannten elektrischen Schwerpunkt der Elektronenbahn gezogenen Vektor, der zu dem vorigen Vektor immer senkrecht ist (zwei weitere Größen). Als sechste Integrationskonstante können wir eine Größe wählen, die die absolute Phase der Bewegung bestimmt. Diese ist für das Folgende unwesentlich.

Um die Abhängigkeit des Winkelmoments von der Zeit zu bestimmen, multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung (1) vektoriell mit $\mathfrak{r}$ und erhalten so, da $\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathfrak{r}|}$ dieselbe Richtung wie $\mathfrak{r}$ hat:

$$m \frac{d}{dt}\left[\mathfrak{r}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = e[\mathfrak{E}\,\mathfrak{r}] + \frac{e}{c}\left[\mathfrak{r}\left[\mathfrak{H}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]\right]. \tag{2}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung eben den Differentialquotienten des Winkelmoments nach der Zeit vorstellt, spricht dieselbe die bekannte Beziehung zwischen der Änderung des Winkelmoments und den Drehungsmomenten der Kräfte aus.

Um zu den säkularen Veränderungen des Winkelmoments zu gelangen, bilden wir den Mittelwert der Gleichung (2) über die Zeit eines Umlaufes des Elektrons in seiner nahezu geschlossenen Bahn. Hierbei können wir auf der rechten Seite für $\mathfrak{r}$ und $d\mathfrak{r}/dt$ die zu der oskulierenden Keplerbewegung zu der Zeit t gehörenden Funktionen der Zeit einsetzen, da dies nur Fehler höherer Ordnung bewirkt. Auf der linken Seite der Gleichung erhalten wir durch diese Mittelwertbildung den mittleren Differentialquotienten des Winkelmoments nach der Zeit. Dieser mittlere Differentialquotient ist nun gleich dem Differentialquotienten nach der Zeit von dem Mittelwert des Winkelmoments über einen Umlauf. Nennen wir dieses mittlere Winkelmoment, das nun ausschließlich säkularen Störungen unterworfen ist, $\mathfrak{P}$, so wird also die linke Seite der Gleichung gleich $d\mathfrak{P}/dt$.

Es möge $\mathfrak{R}$ den ähnlich wie $\mathfrak{P}$ definierten mittleren Vektor zu dem elektrischen Schwerpunkt für die Zeit t bedeuten. Unter Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung können wir dann für das erste Glied rechter Hand einfach $e[\mathfrak{E}\,\mathfrak{R}]$ schreiben.

Was das zweite Glied anbelangt, bemerken wir, daß wir wegen der Identität

$$\left[\mathfrak{r}\left[\mathfrak{H}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]\right]+\left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\left[\mathfrak{r}\mathfrak{H}\right]\right]+\left[\mathfrak{H}\left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{r}\right]\right]=0$$

schreiben können:

$$2\left[\mathfrak{r}\left[\mathfrak{H}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]\right]=\left[\mathfrak{H}\left[\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]\right]+\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{r}\left[\mathfrak{H}\mathfrak{r}\right]\right].$$

Bei Mittelwertbildung fällt nun offenbar das zweite Glied der rechten Seite weg, so daß wir aus (2) schließlich die folgende Gleichung bekommen:

$$\frac{d\mathfrak{P}}{dt}=e\left[\mathfrak{E}\mathfrak{R}\right]+\frac{e}{2mc}\left[\mathfrak{H}\mathfrak{P}\right]. \tag{3}$$

Die Bedeutung dieser Gleichung ist sehr einfach. Während das erste Glied der rechten Seite offenbar das Drehungsmoment bedeutet, welches das elektrische Feld auf ein im elektrischen Schwerpunkt der Bahn befindliches Elektron ausüben würde, entspricht das zweite Glied genau dem wohlbekannten Larmorschen Satz. Dieses Glied bezeichnet nämlich die Änderung in der Zeiteinheit des Winkelmomentvektors für den Fall, daß dieser Vektor um das Magnetfeld als Achse eine einfache Präzessionsbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{e|\mathfrak{H}|}{2mc}$ ausführt.

Zur Bestimmung der säkularen Störungen in den Größen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ liefert uns (3) nur drei Gleichungen. Die drei fehlenden Gleichungen können wir in der folgenden Weise finden. Auf Grund der bekannten Eigenschaften der Keplerbewegung lassen sich die absoluten Beträge der Vektoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ folgendermaßen darstellen:

$$\left.\begin{aligned}|\mathfrak{P}|&=\sqrt{1-\varepsilon^2}\,(2\pi m a^2\omega),\\ |\mathfrak{R}|&=\frac{3}{2}a\varepsilon,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wo ε, $2a$ und ω die Exzentrizität, die große Achse und die Umlauffrequenz der oskulierenden Keplerbewegung bedeuten. Von diesen Größen sind a und ω, die nur von der Totalenergie der oskulierenden Keplerbewegung abhängen, im Gegensatz zu ε frei von säkularen Störungen. Eliminiert man ε aus den Gleichungen (4), so erhält man also eine von der Zeit unabhängige Beziehung zwischen $|\mathfrak{P}|$ und $|\mathfrak{R}|$, nämlich:

$$|\mathfrak{R}|^2+K^2|\mathfrak{P}|^2=\left(\frac{3a}{2}\right)^2, \tag{5}$$

wo zur Abkürzung:

$$K=\frac{3}{4\pi m a\omega} \tag{6}$$

gesetzt wurde. Diese Beziehung gibt uns eine von den notwendigen Gleichungen.

Da $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}$ immer zueinander senkrecht sein müssen, erhalten wir weiter die folgende Beziehung:

$$(\mathfrak{R}\mathfrak{P}) = 0. \tag{7}$$

Nach einem bekannten störungstheoretischen Satz muß der Mittelwert des Beitrages der störenden Kräfte zu der Energiefunktion, genommen über einen Umlauf, unter Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung als die erste in dem Verhältnis der störenden Kräfte zu den ursprünglich anwesenden Kräften in der Zeit konstant sein [1]). Diese mittlere Energiefunktion der störenden Kräfte ist in unserem Falle gegeben durch [2]):

$$\psi = e(\mathfrak{E}\mathfrak{R}) + \frac{e}{2mc}(\mathfrak{H}\mathfrak{P}). \tag{8}$$

Unsere sechste Gleichung lautet deshalb:

$$\psi = \text{konst.} \tag{9}$$

Wir wollen nun aus unseren sechs Gleichungen einen der Formel (3) entsprechenden Ausdruck für $d\mathfrak{R}/dt$ ableiten. Schreiben wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{R}}{dt} + eK^2[\mathfrak{P}\mathfrak{E}] + \frac{e}{2mc}[\mathfrak{R}\mathfrak{H}],$$

so folgen durch skalare Multiplikation von (3) bzw. mit $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{H}$, und nachherigem Vergleich mit den Beziehungen, die bzw. aus (5), (7) und (8) durch Differentiation nach der Zeit entstehen, die drei Gleichungen

$$(\mathfrak{R}\mathfrak{M}) = (\mathfrak{P}\mathfrak{M}) = (\mathfrak{E}\mathfrak{M}) = 0. \tag{10}$$

Da nun im allgemeinen die drei Vektoren $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{E}$ weder verschwinden, noch alle in einer Ebene liegen, muß der Vektor $\mathfrak{M}$ im allgemeinen selbst gleich Null sein. Aus Kontinuitätsgründen müssen wir erwarten, daß dies auch in den eben erwähnten Ausnahmefällen zutrifft [3]). Wir gelangen deshalb zu der folgenden Gleichung für $d\mathfrak{R}/dt$:

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = eK^2[\mathfrak{E}\mathfrak{P}] + \frac{e}{2mc}[\mathfrak{H}\mathfrak{R}]. \tag{11}$$

---

[1]) N. Bohr, l. c., Part II, S. 46, deutsche Ausgabe S. 65.

[2]) N. Bohr, ebenda, S. 91, deutsche Ausgabe S. 130.

[3]) Wie wir in der nächsten Mitteilung sehen werden, ist im Falle $\mathfrak{E} = 0$ eine gewisse Vorsicht nötig, wenn es gilt, die Veränderungen in $\mathfrak{R}$ bei dem adiabatischen Anwachsen eines Magnetfeldes zu beschreiben.

Die Form dieser Gleichung ist, wie man sieht, derjenigen von (3) sehr ähnlich. In dem Grenzfall $\mathfrak{H} = 0$ führt sie auf eine Beziehung, die Bohr in etwas anderer Form bei seiner oben erwähnten Berechnung der Wirkung eines homogenen elektrischen Feldes auf das Wasserstoffatom abgeleitet hat[1]). Für $\mathfrak{E} = 0$ kommen wir wieder auf eine dem Satz von Larmor entsprechende Gleichung.

Die Integration der Gleichungen (3) und (11), die wir nun ausführen wollen, wird sehr vereinfacht, wenn wir durch folgende Substitutionen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ durch gewisse neue Vektoren $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ersetzen[2]):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R} + K\mathfrak{P} &= 2\,\mathfrak{U}, \\ \mathfrak{R} - K\mathfrak{P} &= 2\,\mathfrak{V}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{e}{2\,m\,c}\,\mathfrak{H} + e K \mathfrak{E} &= \mathfrak{A}, \\ \frac{e}{2\,m\,c}\,\mathfrak{H} - e K \mathfrak{E} &= \mathfrak{B}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Wir multiplizieren jetzt die Gleichung (3) mit K und addieren sie zu (11). Dies ergibt:

$$\frac{d\,\mathfrak{U}}{d\,t} = [\mathfrak{A}\,\mathfrak{U}]. \tag{14a}$$

Durch entsprechende Subtraktion erhalten wir:

$$\frac{d\,\mathfrak{V}}{d\,t} = [\mathfrak{B}\,\mathfrak{V}]. \tag{14b}$$

Die Bedeutung dieser Gleichungen ist überaus einfach. Wie man sieht, folgt aus ihnen, daß jeder der Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ unter Beibehaltung seiner Größe eine einfache Präzessionsbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ausführt. Hierbei präzessiert $\mathfrak{U}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $|\mathfrak{A}|$ um $\mathfrak{A}$ als Achse, $\mathfrak{V}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $|\mathfrak{B}|$ um $\mathfrak{B}$ als Achse. Hiermit sind nach (12) auch die säkularen Veränderungen von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}$ völlig bestimmt. Um die Natur dieses Resultates näher kennenzulernen, wollen wir die Grenzfälle $\mathfrak{E} = 0$ und $\mathfrak{H} = 0$ betrachten. Im ersten Falle haben wir:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \frac{e}{2\,m\,c}\,\mathfrak{H}.$$

Der Vektor rechter Hand ist nun einfach der zu dem Zeemaneffekt gehörende Präzessionsvektor, d. h. seine Größe ist gleich der

---

[1]) N. Bohr, l. c., Part II, S. 72, deutsche Ausgabe S. 102.

[2]) Wegen der Veranschaulichung der Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ sei erwähnt, daß, während der absolute Wert von $\mathfrak{R}$ gleich $^3/_2\,\varepsilon\,a$ ist, der absolute Wert von $K\mathfrak{P}$ gleich $^3/_2\,b$ ist, wo $2\,b$ die kleine Achse der Ellipsenbahn bedeutet.

Winkelgeschwindigkeit der Präzession, und seine Richtung gibt die Richtung der Präzessionsachse an. In diesem Falle führen beide Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ einfache Präzessionsbewegungen um die Richtung des Magnetfeldes aus, was nach (12) zu dem Larmorschen Satze führt. Für den zweiten Grenzfall bekommen wir:

$$\mathfrak{A} = \quad eK\mathfrak{E},$$
$$\mathfrak{B} = -eK\mathfrak{E}.$$

In diesem Falle führt deshalb $\mathfrak{U}$ eine Präzessionsbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit $eK|\mathfrak{E}|$ um die Richtung des elektrischen Feldes im positiven Sinne aus. $\mathfrak{V}$ führt dieselbe Bewegung im negativen Sinne aus. Da nun nach (13) $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ als Komponenten von $\mathfrak{R}$ aufgefaßt werden können, folgt hieraus, daß der Endpunkt von $\mathfrak{R}$ in einer festen, senkrecht zur Feldrichtung liegenden Ebene eine harmonische Ellipsenbewegung ausführt, das wohlbekannte Resultat für die Bewegung im Starkeffekt.

Im allgemeinen Fall nun setzt sich nach (13) die Präzessionsbewegung der Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ aus den genannten speziellen Präzessionsbewegungen in eben der Weise zusammen, wie eine Rotationsbewegung eines starren Körpers aus zwei Rotationsbewegungen.

§ 2. Die stationären Zustände. Indem also das Problem der säkularen Störungen erledigt ist, können wir nach den Prinzipien der Quantentheorie gewisse Aussagen über die Energiewerte der möglichen stationären Zustände unseres Systems machen. Suchen wir zu diesem Zweck zuerst diejenigen Größen auf, die während der gestörten Bewegung konstant bleiben. Diese sind erstens die mittlere Energie der oskulierenden Keplerbewegung und eine Größe, welche die absolute Phase der Bewegung bestimmt, zweitens die vier für die säkularen Störungen charakteristischen Konstanten. Solche vier Konstanten können wir leicht finden. Wie man sofort einsieht, sind nämlich die Projektionen der Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ auf $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, d. h. die Größen $\frac{(\mathfrak{U}\,\mathfrak{A})}{|\mathfrak{A}|}$ und $\frac{(\mathfrak{V}\,\mathfrak{B})}{|\mathfrak{B}|}$ konstant. Zwei weitere, für den Charakter der stationären Zustände jedoch unwesentliche Konstanten bestimmen die Phasen der beiden Präzessionsbewegungen.

Als erste der die stationären Zustände charakterisierenden Größen wählen wir naturgemäß die gewöhnliche zur mittleren Energie der Keplerbewegung gehörende Größe I. Da die säkularen Störungen zwei unabhängige Frequenzen enthalten, müssen noch zwei solche Größen vorhanden sein, die Funktionen von $\frac{(\mathfrak{U}\,\mathfrak{A})}{|\mathfrak{A}|}$ und $\frac{(\mathfrak{V}\,\mathfrak{B})}{|\mathfrak{B}|}$ und möglicherweise von I sein müssen. Zwischen den Änderungen dieser Größen, die wir mit I_1 und I_2 bezeichnen wollen, und der Änderung der Größe ψ muß bekanntlich, wenn I konstant gehalten wird, die folgende Beziehung bestehen [1]):

$$\delta \psi = \omega_1 \delta I_1 + \omega_2 \delta I_2, \tag{15}$$

wo ω_1 und ω_2 die Grundfrequenzen der säkularen Störungen bedeuten. Für diese Größen wählen wir die Frequenzen der soeben beschriebenen Präzessionsbewegungen. Wir haben dann:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{|\mathfrak{A}|}{2\pi}, \\ \omega_2 &= \frac{|\mathfrak{B}|}{2\pi}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Da diese Größen von dem Bewegungszustand des Systems unabhängige Konstanten sind, können wir die Beziehung (15) integrieren. Den Nullpunkt der Größen I_1 und I_2 setzen wir dabei willkürlich so fest, daß die hierbei auftretende Integrationskonstante gleich Null wird. Wir erhalten dann:

$$\psi = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2. \tag{17}$$

Aus (8), (12) und (13) folgt weiter:

$$\psi = \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{U}) - (\mathfrak{B}\mathfrak{V})}{K}. \tag{18}$$

Wir erfüllen beide Beziehungen, wenn wir die Größen I in der folgenden Weise bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{2\pi(\mathfrak{A}\mathfrak{U})}{K|\mathfrak{A}|}, \\ I_2 &= -\frac{2\pi(\mathfrak{B}\mathfrak{V})}{K|\mathfrak{B}|}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Diese Größen sind also gleich den mit $2\pi/K$ multiplizierten Projektionen von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{A}$ und von $\mathfrak{V}$ auf $-\mathfrak{B}$.

Aus den Gleichungen (19) können wir leicht die Grenzen bestimmen, innerhalb deren die Größen I_1 und I_2 liegen müssen, da die absoluten Werte der genannten Projektionen höchstens gleich den absoluten Beträgen der Vektoren selbst sein können. Diese finden wir aber mit Hilfe von (5) und (12). Da $(\mathfrak{R}\mathfrak{P}) = 0$, ergibt sich einfach

$$|\mathfrak{U}| = |\mathfrak{V}| = \frac{3a}{4}. \tag{20}$$

---

[1]) N. Bohr, l. c., Part II, S. 52, deutsche Ausgabe S. 72.

Der größte numerische Wert jeder der Größen I_1 und I_2 ist also gleich $\frac{2\pi}{K}\cdot\frac{3a}{4}$, oder auf Grund von (6) des bekannten Zusammenhanges zwischen a, ω und I gleich $^1/_2\, I$. Es ist von Interesse, die Bewegung in diesen extremen Fällen zu studieren. Da hier offenbar $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{B}$ parallel ist, sieht man aus (14), daß sowohl $\mathfrak{U}$ wie $\mathfrak{V}$ in der Zeit konstant sind, so daß überhaupt keine säkularen Störungen auftreten. Über die Beziehung dieser Fälle zu den stationären Zuständen wollen wir später sprechen.

Wie wir in der nächsten Mitteilung sehen werden, sind die Größen I_1 und I_2 für solche Vorgänge invariant, bei denen die äußeren Felder adiabatisch Richtung und Größe verändern. Nach dem Prinzip von Ehrenfest sind dieselben deshalb zur Definition der stationären Zustände geeignet. Aus dem Korrespondenzprinzip und der Gleichung (15) folgt, daß die Unterschiede der Werte dieser Größen in den verschiedenen stationären Zuständen immer ganzzahlige Vielfache der Konstante von Planck sein müssen. Zur Bestimmung ihrer absoluten Größe genügt es, ihre Werte in einem Spezialfall zu kennen, eine Frage, zu der wir in der nächsten Mitteilung zurückkehren wollen.

Zum Schluß wollen wir nun sehen, was aus unseren Größen I_1 und I_2 für die Fälle $\mathfrak{E} = 0$ und $\mathfrak{H} = 0$ wird. Für $\mathfrak{H} = 0$ erhalten wir

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_H,$$

wo ω_H die Larmorfrequenz bedeutet. In diesem Falle bekommen wir aus (17):

$$\psi = \omega_H (I_1 + I_2).$$

Die säkularen Störungen erfordern also nur eine Quantenbedingung, die den Wert von $I_1 + I_2$ festlegt. Für diese Summe bekommen wir nun aus (19):

$$I_1 + I_2 = 2\pi P_H,$$

wo P_H die Projektion des Winkelmomentes $\mathfrak{P}$ auf die Richtung des Magnetfeldes bedeutet. Dies ist aber gerade die Größe, die beim Zeemaneffekt gleich einem ganzen Vielfachen der Konstante von Planck angenommen wird. Wir müssen deshalb annehmen, daß $I_1 + I_2$ auch bei der Anwesenheit eines elektrischen Feldes ein ganzzahliges Multiplum der Planckschen Konstanten sein muß.

Für den anderen Grenzfall $\mathfrak{H} = 0$ bekommen wir:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_E,$$

wo ω_E die für den Starkeffekt charakteristische Frequenz $eK|\mathfrak{E}$ bedeutet. Also gilt:

$$\psi = \omega_E (I_1 + I_2)$$

und aus (19) folgt:

$$I_1 + I_2 = \frac{2\pi}{K} z,$$

wo z die Projektion von $\mathfrak{R}$ auf die Richtung des elektrischen Feldes bedeutet. Wenn wir diesen Wert von $I_1 + I_2$ gleich einem ganzen Vielfachen der Planckschen Konstante setzen, finden wir die gewöhnliche Quantenbedingung für den Starkeffekt. In bezug auf die stationären Zustände bei der Anwesenheit beider Felder lehrt uns dieser Fall also nichts Neues.

Die besprochenen Fälle sind nicht die einzigen, bei denen die säkularen Störungen einen rein periodischen Charakter besitzen. Vielmehr ist dies, wie man leicht einsieht, immer dann der Fall, wenn der Kosinus des Winkels γ zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\cos\gamma = \frac{\varkappa^2 - 1}{\varkappa^2 + 1} \frac{\omega_H^2 + \omega_E^2}{2\,\omega_H\,\omega_E}, \tag{21}$$

wo $\varkappa$ eine rationale Zahl bedeutet. Dann besteht nämlich zwischen den Frequenzen ω_1 und ω_2 die Beziehung:

$$\omega_1 = \varkappa\,\omega_2. \tag{22}$$

Bemerkenswert ist, daß der Fall $\cos\gamma = 0$, wo die Felder aufeinander senkrecht sind, bei beliebigen Werten der Feldstärken zu den entarteten Fällen gehört, indem hier $\omega_1 = \omega_2$ ist. Interessant ist auch der Fall, daß die Felder parallel sind und $\omega_E = \omega_H$ ist. Wenn die Felder die gleiche Richtung haben, ist dieser Fall für $\varkappa = \infty$ erfüllt. Dann ist $\omega_2 = 0$, so daß $\mathfrak{B}$ im Raum feststeht. Bei entgegengesetzter Richtung der Felder ist $\varkappa = 0$, und $\mathfrak{U}$ steht fest.

University of Michigan, 31. Dezember 1923.