

## Der Paschen-Back-Effekt der Hyperfeinstruktur.

Von **S. Goudsmit** und **R. F. Bacher** in Ann Arbor, Michigan.

Mit 13 Abbildungen. (Eingegangen am 19. August 1930.)

Die Theorie des Paschen-Back-Effektes für gewöhnliche Multipletts wird erweitert zum Zwecke ihrer Anwendung auf Hyperfeinstrukturen, welche von einem Kernmoment herrühren. Die Ergebnisse werden mit den Backschen Aufnahmen der Wismutlinien verglichen.

Die Theorie des Zeemaneffekts für Multipletts in allen Feldstärken, von schwachen Magnetfeldern ausgehend, wo jede Linie regulär nach der einfachen Landéschen Theorie aufspaltet, bis zu sehr starken Feldern, wo eine Umwandlung des ganzen Multipletts bis zum vollständigen Paschen-Back-Effekt stattgefunden hat, ist von Heisenberg und Jordan\* und von Darwin\*\* mit Hilfe der quantenmechanischen Störungsrechnung durchgeführt worden. Ihre Rechnungen ergeben sowohl die Lage der magnetisch aufgespaltenen Niveaus wie die Intensitäten der Übergänge für jede Feldstärke.

Bekanntlich sind die von einem Kernmoment hervorgerufenen Hyperfeinstrukturen in vielen ihrer Eigenschaften nahe verwandt mit gewöhnlichen Multipletts. In der Modellvorstellung des Atoms rühren die Multipletts her von der magnetischen Wechselwirkung zwischen Elektronenspin und Bahnbewegung, während die Hyperfeinstrukturen durch die Wechselwirkung zwischen dem Kernspin einerseits und der gesamten Elektronenhülle andererseits zustande kommen. Einfache Überlegungen an der Hand des Modells zeigen, daß für beide Probleme diese Wechselwirkung nur von den beteiligten Impulsmomenten und ihrer Winkelstellung zueinander und zur Richtung des äußeren Feldes abhängt, und zwar bei beiden Problemen in genau derselben Weise\*\*\*. Die Absolutgröße der Wechselwirkung allerdings ist in beiden Fällen sehr verschieden, wie schon aus der Kleinheit der Hyperfeinstrukturen, verglichen mit der gewöhnlichen Multiplettstruktur, hervorgeht. Die Folge dieser Überlegungen ist nun, daß man eine

\* W. Heisenberg u. P. Jordan, ZS. f. Phys. **37**, 263, 1926.

\*\* C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. London (A) **115**, 1, 1927.

\*\*\* Hierbei ist angenommen worden, daß sowohl die Hyperfeinstruktur wie auch die vom Felde hervorgerufene Aufspaltung klein ist gegenüber der Multiplettaufspaltung des betrachteten Niveaus. Nur in diesem Falle kann man die Elektronenhülle als ein Ganzes mit einem konstanten quantisierten Totalmoment  $J$  auffassen. Für Einzelheiten bezüglich der Wechselwirkungsenergie zwischen Kern und Elektronenhülle siehe L. Pauling u. S. Goudsmit, *The Structure of Line Spectra*, Mc Graw-Hill 1930, Kap. XI.

ganze Gruppe der für Multipletts abgeleiteten Ergebnisse fast unmittelbar auf die Hyperfeinstrukturen übertragen kann. Zu solchen Resultaten gehören die Intensitätsformeln, die Intervallregel und die gesamten Formeln des Zeemaneffekts, womit wir uns hier speziell beschäftigen wollen.

Die Übertragung der Zeemaneffekttheorie auf den Fall der Hyperfeinstruktur ist deshalb wichtig, weil man bei diesen in der Lage ist, die Ergebnisse eingehend am experimentellen Material zu prüfen. Auch wird das magnetische Verhalten einer Linie mit Hyperfeinstruktur Aufschluß geben können über die Eigenschaften des Kernes, welche die Hyperfeinstruktur verursachen. Ebenso wie der gewöhnliche Zeemaneffekt einer einzelnen Spektrallinie äußerst fruchtbare Anhaltspunkte geben kann für die Deutung des ganzen Spektrums, so wird auch die magnetische Untersuchung der Hyperfeinstruktur sehr viel zu ihrer Interpretation beitragen können, wie z. B. im Falle des Wismuts\*.

Für gewöhnliche Multipletts konnte die Paschen-Back-Effekttheorie nur in wenigen Fällen eingehend mit dem Experiment verglichen werden. Um nämlich mit den stärksten für den Zeemaneffekt brauchbaren Feldern, etwa 43000 Gauß, Paschen-Back-Effekterscheinungen beobachten zu können, muß man ein enges Multiplett wählen, das nur einige Wellenzahlen ( $\text{cm}^{-1}$ ) weit ist. Solche engen Multipletts gibt es im allgemeinen nur in den leichteren Elementen oder in höheren Seriengliedern. Beide Fälle sind für eine ins Einzelne gehende Untersuchung der Aufspaltung wegen der charakteristischen Unschärfe solcher Linien nicht günstig. Ausnahmen bilden die  $^3P-^3D$ -Kombinationen des Magnesiums. Hier ist das feldlose  $D$ -Triplet unauflösbar eng, und das äußere Feld verursacht daher einen vollständigen Paschen-Back-Effekt, während andererseits das  $P$ -Triplet sehr weit ist, so daß es noch gar keine Paschen-Back-Verzerrung zeigt\*\*. Einen anderen interessanten Fall bilden die  $^3P-^3D$ -Kombinationen des Zinks, wo man gerade den *Anfang* des Paschen-Back-Effekts beobachtet\*\*\*.

\* E. Back u. S. Goudsmit, ZS. f. Phys. **47**, 174, 1928. Die einzelne Tatsache, daß bei einer Linie des Wismutpektrums die „Grobkomponenten“ des Zeemaneffektes in je zehn Feinkomponenten aufgelöst werden konnten, genügte zur eindeutigen Bestimmung des Kernmomentes! (vgl. dieses Heft S. 11 und Fig. 15 und 16 ebenda).

\*\* Theoretische Rechnungen von L. Mensing, ZS. f. Phys. **39**, 24, 1926, in Verbindung mit experimentellen Daten von E. Back, ebenda **33**, 587, 1925. Im einfacheren Falle der höheren Serienglieder der  $^2P-^2D$ -Kombinationen im Natrium findet man auch eine Bestätigung der Theorie. (Vgl. E. Back u. A. Landé, Zeemaneffekt und Multiplettstruktur, Springer 1925, S. 78.)

\*\*\* Für diesen Fall entdeckten F. Paschen u. E. Back (Physica **1**, Lorentzheft S. 261, 1921) die vom Felde hervorgerufenen „verbotenen“ Übergänge

Aus dem oben Gesagten geht hervor, daß man die Multipllettformeln auf die Hyperfeinstruktur anwenden kann, wenn man die dort auftretenden Impulsvektoren in der richtigen Weise ersetzt. Tabelle 1 stellt diese Übersetzung der Quantenvektoren dar.

Tabelle 1.  
Analogie zwischen Multipllett- und Hyperfeinstruktur.

Resultante des Elektronenspins . . . . .	$S$	$I$	Kernspin
Resultante aller Bahnmomente . . . . .	$L$	$J$	Totalmoment der Elektronenhülle
Totalresultante von $S$ und $L$ . . . . .	$J$	$F$	Totalresultante von $I$ und $J$
Magnetisches Moment der Spinresultante . .	$g(S) \cdot S$	$g(I) \cdot I$	Magnetisches Moment des Kernes
Magnetisches Moment der Bahnresultante . .	$g(L) \cdot L$	$g(J) \cdot J$	Magnetisches Moment der Elektronenhülle
Projektion auf die Feldrichtung			Projektion auf die Feldrichtung
von $S$ . . . . .	$M_S$	$M_I$	von $I$
von $L$ . . . . .	$M_L$	$M_J$	von $J$
von $J$ . . . . .	$M_J$	$M_F$	von $F$

In dieser Tabelle sind die Impulsvektoren wie üblich in Einheiten  $h/2\pi$  gegeben, die magnetischen Momente in Bohrmagnetonen,  $h/2\pi \cdot e/2mc$ . Die Einheit des magnetischen Moments wird immer so gewählt, daß der Landésche  $g$ -Faktor für das Bahnmoment gleich 1 ist, für den Spin ist er dann bekanntlich gleich 2. Das  $g(J)$  hängt von den Werten von  $L$ ,  $S$  und  $J$  ab und wird durch die bekannte Landésche  $g$ -Formel gegeben\*:

$$\begin{aligned}
 g(J) &= \frac{Sg(S)}{J} \cos(SJ) + \frac{Lg(L)}{J} \cos(LJ) \\
 &= 2 \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} + \frac{J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)}{2J(J+1)} \\
 &= 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \tag{1}
 \end{aligned}$$

entgegen der  $J$ -Auswahlregel. Intensitätsmessungen, W. van Geel, ZS.f. Phys. 51, 51, 1928; theoretische Rechnungen, A. Zwaan, ebenda S. 62. Vgl. weiter vor allem den Artikel von E. Back in „Handb. d. Experimentalphys. 22, 124ff.

\* Diese Formel gilt nur für die Russell-Saunderssche Kopplung, und auch nur diese Kopplung zeigt Analogie mit der Hyperfeinstruktur.

Wie man aus der Größe der Hyperfeinstrukturen ableiten kann, und wie man es auch nach der Theorie erwartet, ist  $g(I)$  sehr klein, etwa  $1/2000$ . Das Kernmoment soll nämlich von den Protonen im Kern herrühren, und obwohl das mechanische Impulsmoment des Kerns von derselben Größenordnung ist, wie das des Elektrons,  $\frac{1}{2} h/2\pi$ , so ist das magnetische Moment viel kleiner, weil die Masse des Protons statt der Masse des Elektrons im Nenner des Ausdrucks für dieses Moment auftritt. Für die praktische Anwendung bedeutet dies, daß man durchgängig Terme mit  $g(I)$  fortlassen\* kann, weil ihr Einfluß unbeobachtbar klein ist. Als erstes Beispiel für die Übersetzungstabelle 1 können wir nun sofort die Formel für  $g(F)$  hinschreiben\*\*:

$$g(F) = g(J) \frac{F(F+1) + J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)} \quad (2)$$

Der Term mit  $g(I)$  ist hier weggelassen\*\*\*. Kenntnis des  $g(F)$  für Anfangs- und Endzustand liefert in bekannter Weise den Zeemaneffekt in schwachen Feldern, welche hier allerdings so schwach sein müssen, daß die vom Felde verursachte Zeemanaufspaltung erheblich kleiner ist als die Hyperfeinstruktur selbst. Für solche Felder ist die Aufspaltung kaum beobachtbar, und es wird klar, weshalb die Formeln für mittelstarke und starke Felder gerade für die Hyperfeinstruktur besonders wichtig sind. Die Theorie für sehr starke Felder ist von S. Goudsmit und E. Back\*\*\*\* auf Hyperfeinstruktur angewandt worden.

*Das Rechnungsverfahren.* Das Rechnungsverfahren der vollständigen Theorie des Paschen-Back-Effekts ist besonders von Frau K. Darwin† eingehend beschrieben und an Rechnungsbeispielen erläutert worden. Obwohl diese Rechnungen mit Hilfe der Übersetzungstabelle sofort auf Hyperfeinstrukturen übertragen werden können, so halten wir es doch

---

\* Richtiger ausgedrückt darf man diese Terme nur vernachlässigen, wenn das Feld, welches auf das magnetische Moment einwirkt, klein ist; denn die Energie ist proportional dem Produkt aus magnetischem Moment und Feldstärke. Dies ist immer der Fall für äußere Felder, aber keinesfalls für die inneratomaren Magnetfelder, welche ja gerade die beobachtbare Hyperfeinstruktur hervorrufen.

\*\* L. Pauling u. S. Goudsmit, *Structure of Line Spectra*, S. 219.

\*\*\* Dieses Beispiel zeigt zugleich, daß man die Übersetzung nicht zu schematisch ausführen darf, sondern daß man auf die Ableitung der Formel jeweils Rücksicht nehmen muß. Hätte man z. B. die Übersetzung sofort auf das Endresultat der Formel (1) angewandt, so hätte man ein unrichtiges Ergebnis bekommen.

\*\*\*\* E. Back u. S. Goudsmit, *ZS. f. Phys.* **47**, 174, 1928.

† K. Darwin, *Proc. Roy. Soc. London (A)* **118**, 264, 1928.

für wünschenswert, das Verfahren hier nochmals kurz zu beschreiben, zumal wir es auf bestimmte Fälle anwenden wollen\*, welche noch nicht in der Literatur behandelt worden sind. Für die Theorie müssen wir auf die Originalarbeiten von Heisenberg und Jordan und von Darwin verweisen, wir geben hier nur das Rechenschema.

*Die Energiewerte.* Wir betrachten ein Niveau mit Hyperfeinaufspaltung ohne Magnetfeld und nehmen an, daß die Intervallregel exakt erfüllt ist. Fig. 1 gibt zwei dem Wismut\*\* entnommene Beispiele. Den Proportionalitätsfaktor der Intervalle bezeichnen wir mit  $A$  und nehmen ihn positiv,

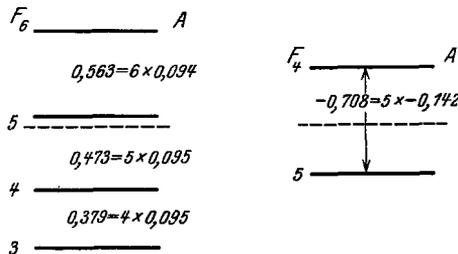


Fig. 1. Hyperfeinstruktur von zwei Wismutniveaus. (Die gestrichelten Linien geben den Schwerpunkt an.)

wenn das Niveau mit dem größten  $F$  oben liegt. Die Energiewerte sind im folgenden immer bezogen auf den Schwerpunkt des Niveaus, welchen man findet, indem man jedem Feinstrukturniveau das Gewicht  $2F + 1$  erteilt.

In einem schwachen äußeren Magnetfeld hat das Totalmoment  $F$  bestimmte quantisierte Projektionen auf die Feldrichtung  $H$  und nach der einfachen Theorie des Zeemaneffektes ist die magnetische Zusatzenergie

$$\Delta E = M_F g(F) o \cdot H. \quad (3)$$

Hier und im folgenden ist  $o$  die Abkürzung für die Larmorfrequenz  $e/4 \pi^2 m c^2$ , und alle Energien sind in Wellenzahlen ausgedrückt. Diese Formel ist aber nur gültig in so schwachen Feldern, daß die magnetische Zusatzenergie klein ist gegen die Hyperfeinaufspaltung. Bezogen auf den Schwerpunkt des Niveaus wird Formel (3):

$$E(F, M_F) = \frac{F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)}{2} \cdot A + M_F g(F) o H. \quad (4)$$

\* Nämlich die Übergänge, wobei sich  $J$  nicht ändert. Diese entsprechen, nach der Tabelle 1, bei Darwin den Fällen, wo sich  $L$  nicht ändert. Diese Fälle sind weder von Darwin, noch von Heisenberg und Jordan behandelt worden, weil das etwas zu einfache Modell, das sie benutzen, diesen Übergang nicht zuläßt.

\*\* S. Goudsmit u. E. Back, ZS. f. Phys. 43, 321, 1927.

Der Faktor vor  $A$  ist das Äquivalent des von Landé für Multipletts eingeführten  $\gamma$ -Faktors\*.

In einem sehr starken Felde, wo die Feldaufspaltung groß ist gegen die Hyperfeinstruktur, wird die Energie\*\*

$$E(M_I, M_J) = A M_I M_J + M_J g(J) o H. \quad (5)$$

Hierin ist wieder der Term mit  $g(I)$  weggelassen worden.

Bekanntlich gibt es einen eindeutigen stetigen Übergang der Energiewerte vom schwachen zum starken Felde, wie auch aus dem Folgenden hervorgehen wird. Es ist deshalb gleichgültig, ob man die verschiedenen Energiewerte durch  $F$  und  $M_F$  oder durch  $M_I$  und  $M_J$  charakterisiert,

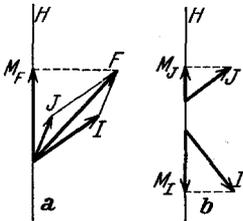


Fig. 2.

Schematische Darstellung der Quantelung:

- a) in sehr schwachem Feld;  
b) in sehr starkem Feld.

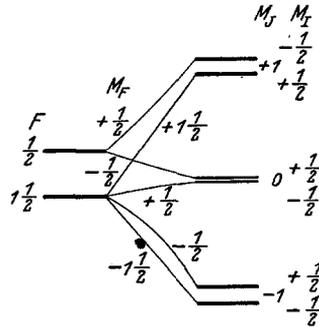


Fig. 3.

Schematische Darstellung des Übergangs vom schwachen zum starken Magnetfeld.

denn durch den stetigen Übergang ist jedem Wertepaar  $F, M_F$  ein Wertepaar  $M_I, M_J$  zugeordnet. Man könnte sogar irgendein Paar dieser vier Quantenzahlen zur eindeutigen Bezeichnung der Aufspaltungsniveaus benutzen (Fig. 2). Die Übergangsregeln sind wie folgt\*\*\*:

1. Die Totalprojektion auf das Feld bleibt ungeändert, also

$$M_F = M_J + M_I.$$

2. Die verschiedenen Niveaus mit ein und demselben Wert dieser Totalprojektion  $M_F$  überschneiden sich bei Änderung des Feldes nicht. Für die Hyperfeinstruktur heißt dies: Bei gegebenen  $M_F = M_J + M_I$  gehört das Niveau mit dem größten  $M_J$ , wenn  $A$  positiv, das mit dem kleinsten\*\*\*\*  $M_J$ ,

\* Back-Landé, Zeemaneffekt, Kap. III.

\*\* E. Back u. S. Goudsmit, ZS. f. Phys. I. c.

\*\*\* Zuerst von W. Pauli für Multipletts abgeleitet. ZS. f. Phys. 20, 371, 1924.

\*\*\*\* Man beachte, daß  $M_J$  negative Werte annehmen kann und der kleinste Wert also der größte negative Wert ist. Weiter sei noch bemerkt, daß in den sehr seltenen Fällen, wo  $g(J)$  negativ ist, das Resultat sich wieder umkehrt.

wenn  $A$  negativ, zum größten  $F$ -Wert. Die anderen gehören der Reihenfolge nach den übrigen  $F$ -Werten an.

Fig. 3 stellt für ein einfaches Beispiel diesen Übergang dar. Für unsere Zwecke ist es am bequemsten, die verschiedenen Niveaus mit  $M_I$  und  $M_J$  zu bezeichnen.

Das weitere Verfahren entwickelt sich vollständig aus der folgenden Schlüsselgleichung. Man betrachte die homogene Gleichung:

$$\begin{aligned} & - X_{M_I+1, M_J-1} \frac{A}{2} (I + M_I + 1) (J - M_J + 1) \\ & + X_{M_I, M_J} (E - A M_I M_J - M_J g(J) \circ H) \\ & - X_{M_I-1, M_J-1} \frac{A}{2} (I - M_I + 1) (J - M_J + 1) = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

Für festgehaltenes  $M_F = M_I + M_J$  schreibe man nun sämtliche möglichen dieser Gleichungen hin; ihre Anzahl ist beschränkt, weil die möglichen Werte von  $M_I$  und  $M_J$  als Projektionen von  $I$  und  $J$  selber beschränkt sind. Man bekommt ebenso viele Gleichungen, wie es Niveaus mit dem gegebenen Wert von  $M_F$  gibt. Diese homogenen Gleichungen lassen sich nur dann lösen, wenn ihre Determinante verschwindet. Dies liefert eine Gleichung, meistens höherer Ordnung, für  $E$  und ihre Wurzeln sind die gesuchten Energiewerte für die Niveaus mit dem bestimmten  $M_F$ -Wert.

Als erste Näherung in  $A$ , also wenn der Term mit  $H$  der größere ist, ergeben sich als die Wurzeln der Säkulardeterminante

$$E(M_I, M_J) = M_J g(J) \circ H + A M_I M_J,$$

also in der Tat die Formel (5). Die zweite Näherung ergibt:

$$\begin{aligned} E(M_I, M_J) &= M_J g(J) \circ H + A M_I M_J \\ &+ \frac{A^2}{2g(J) \circ H} [M_J \{I(I+1) - M_I^2\} - M_I \{J(J+1) - M_J^2\}]. \quad (7) \end{aligned}$$

Es wird sich wohl auch zeigen lassen, daß für schwache Felder die Wurzeln der Determinante von Formel (4) gegeben werden. In einfachen Fällen kann man die Gleichung für  $E$  auch exakt lösen. Wenn z. B. entweder  $I$  oder  $J$  gleich  $\frac{1}{2}$  ist, gibt es nur zwei mögliche Werte von  $M_I$  bzw.  $M_J$ . Daher gibt es für ein gegebenes  $M_F$  auch nur höchstens zwei Gleichungen des Typus (6). Die Determinante wird dann nur von der zweiten Ordnung.

Die weitere Untersuchung lehrt, daß die Wurzeln der Determinante sich bei allmählicher Änderung von  $H$  nicht überschneiden, woraus sich dann die auf S. 18 dargestellten Übergangsregeln ergeben.

Aus den Energiewerten von Anfangs- und Endzustand bekommt man in der üblichen Weise durch einfache Subtraktion die Lage der Zeeman-komponenten der Linie. Weil unsere Energien sich auf den Schwerpunkt des Niveaus beziehen, so werden die Komponentenlagen sich immer auf den Schwerpunkt des Liniengebildes beziehen. Das äußere Feld wurde hier homogen angenommen, deshalb kommen nur diejenigen Übergänge vor, wobei sich die Totalprojektion  $M_F = M_I + M_J$  um 0 oder  $\pm 1$  ändert.

*Die X-Werte.* Wenn man eine bestimmte Wurzel  $E(M_I, M_J)$  gewählt hat, kann man sie in die Gleichungen (6) einsetzen und diese jetzt nach den unbekanntem  $X$  lösen\*. Die homogenen Gleichungen geben nur das Verhältnis der  $X$ ; ihre Absolutwerte bekommt man, wenn man noch die sogenannte Normalisierungsgleichung hinzuzieht. Sie lautet für unseren Fall:

$$1 = \sum_{M_F = \text{const}} (X_{M_I, M_J})^2 (I + M_I)! (I - M_I)! (J + M_J)! (J - M_J)! \quad (8)$$

Die Lösung bereitet keine Schwierigkeiten, die einzige Schwierigkeit liegt in der Bezeichnung der  $X$ . Man sieht nämlich, daß es für jedes gewählte Niveau, welches durch sein  $M_I$  und  $M_J$  gekennzeichnet ist, eine Anzahl von  $X$  gibt, welche Indizes  $M_I$  und  $M_J$  tragen, die gar nicht mit den Quantenzahlen des gewählten Niveaus übereinstimmen. Nur die Summe ist für beide Wertepaare gleich dem gewählten  $M_F$ . Wir müssen deshalb notgedrungen eine neue Bezeichnung einführen und schreiben:

$$X_\mu(M_I, M_J).$$

Hierin sind dann  $M_I$  und  $M_J$  die festgelegten Werte für das uns interessierende Niveau, und  $\mu$  sei der variable  $M_J$ -Wert der Indizes.

Die Lösung der Gleichungen in  $A$  ergibt, daß — wenn man sich mit der *nullten* Näherung in  $A$  begnügt — fast alle  $X$  gleich Null sind, ausgenommen die, für welche  $\mu = M_J$  ist. Für diese gibt dann die Normalisierungsgleichung (8):

$$X_{M_J}(M_I, M_J) = \frac{1}{\sqrt{(I + M_I)! (I - M_I)! (J + M_J)! (J - M_J)!}} \left. \right\} \quad (9)$$

Alle anderen  $X$  gleich Null.

---

\* Diese sind bekanntlich die Koeffizienten in der Entwicklung der gestörten Eigenfunktion nach den Eigenfunktionen des ungestörten Problems.

In dieser Näherung gehört also zu jedem Niveau nur *ein*  $X$ . Die *erste* Näherung in  $A$  gibt jedoch *außerdem*

$$\left. \begin{aligned} X_{M_J - 1} &= \frac{\frac{A}{2} (J - M_J) (I + M_I)}{g(J) \circ H} X_{M_J}, \\ X_{M_J + 1} &= \frac{-\frac{A}{2} (J + M_J) (I - M_I)}{g(J) \circ H} X_{M_J}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Für einfache Fälle kann man natürlich auch exakte Lösungen für die  $X$  hinschreiben.

*Die Intensitätsformeln.* Wenn man schließlich die  $X$ -Werte für Anfangs- und Endzustand berechnet hat, so erhält man die Intensitäten der verschiedenen Übergänge durch Einsetzen in die Formeln (11) bis (16). Die Quantenzahlen des Endzustandes sind durch einen Akzent von denen des Anfangszustandes unterschieden. Es gibt in homogenen Feldern nur drei mögliche Änderungen für die Totalprojektion  $M_F$ , nämlich  $M_F = M'_F$  und  $M_F = M'_F \pm 1$ . Erstere gibt eine parallel dem Felde linear polarisierte Komponente, die beiden anderen die zirkular (senkrecht zur Feldrichtung) schwingenden Komponenten. Für  $J$  gilt die Auswahlregel  $J = J'$  oder  $J = J' \pm 1$ . Die Formeln für den Fall  $J = J'$  sind hier zum ersten Male gegeben\*. Ihre Ableitung ist nur wenig komplizierter als die von Heisenberg und Jordan und von Darwin gegebene Ableitung der anderen Fälle, und wir halten es daher nicht für erforderlich, sie hier näher auseinanderzusetzen.

Übergang von  $J$  nach  $J - 1$ , also  $J' = J - 1$ .

Parallelkomponenten,  $M'_F = M_F$ :

$$\text{Int.} = 4 \left[ \sum X_\mu X'_\mu (I + M_I)! (I - M_I)! (J + \mu)! (J - \mu)! \right]^2, \quad (11)$$

Senkrechtkomponenten,  $M'_F = M_F - 1$ :

$$\text{Int.} = \left[ \sum X_\mu X'_{\mu-1} (I + M_I)! (I - M_I)! (J + \mu)! (J - \mu)! \right]^2, \quad (12)$$

Senkrechtkomponenten,  $M'_F = M_F + 1$ :

$$\text{Int.} = \left[ \sum X_\mu X'_{\mu+1} (I + M_I)! (I - M_I)! (J + \mu)! (J - \mu)! \right]^2. \quad (13)$$

Übergang  $J' = J$ .

Parallelkomponenten,  $M'_F = M_F$ :

$$\text{Int.} = 4 \left[ \sum X_\mu X'_\mu (I + M_I)! (I - M_I)! (J + \mu)! (J - \mu)! \mu \right]^2, \quad (14)$$

\* Vgl. die Fußnote S. 17.

Senkrechtkomponenten,  $M'_F = M_F - 1$ :

$$\text{Int.} = \left[ \sum X_\mu X'_{\mu-1} (I + M_I)! (I - M_I)! (J + \mu)! (J - \mu + 1)! \right]^2, \quad (15)$$

Senkrechtkomponenten,  $M'_F = M_F + 1$ :

$$\text{Int.} = \left[ \sum X_\mu X'_{\mu+1} (I + M_I)! (I - M_I)! (J + \mu + 1)! (J - \mu)! \right]^2. \quad (16)$$

Man setzt die verschiedenen  $X$ -Werte für Anfangs- und Endniveau der betreffenden Komponente in diese Formeln ein und summiert über den Index  $\mu$ . Bei dieser Summation bleibt dann  $M_F = \mu + M_I$  konstant. Die Quantenzahlen beziehen sich bei unserer Wahl alle auf das Anfangsniveau, das Endniveau liefert nur den  $X'$ -Wert. In einfachen Fällen, wo jedes Niveau nur ein  $X$  hat, haben die obenstehenden Summen also nur je einen Term.

In einem so starken Felde, daß man für die  $X$  sowohl des Anfangs- wie auch des Endzustandes nur die nullte Näherung in  $A$  zu berücksichtigen braucht, wird die Intensität vieler Komponenten wegen der Formeln (9) gleich Null. Für diesen Extremfall gilt dann die Auswahlregel, daß  $M_I$  sich bei einem Übergang nicht ändert\*. Die Resultate werden dann mit der früher gegebenen Behandlung\*\* dieses Extremfalles identisch. Es folgt auch, daß der Wert von  $M_I$  in diesem Falle die Intensitäten nicht beeinflußt. Wenn aber das Feld nicht in dem Maße „ganz stark“ ist, so werden Komponenten auftreten, welche einer Änderung von  $M_I$  um  $+1$  und  $-1$  entsprechen. Diese Linien werden „verbotene“ Komponenten genannt, eigentlich unrichtigerweise, denn die Totalprojektion  $M_F$  ändert sich bei solchen Übergängen immer nur um  $+1$ ,  $0$  und  $-1$ . Ein anderes Merkmal für den unvollständigen Paschen-Back-Effekt sind kleine Asymmetrien im Zeemanbild, welche von der zweiten Näherung in Formel (7) herrühren.

In sehr schwachen Feldern geben die Intensitätsformeln automatisch die Auswahlregel für  $F$ , nach welcher  $F$  sich auch nur um  $+1$ ,  $0$  und  $-1$  ändern kann. Die Intensitäten in Abwesenheit des Feldes werden mit den Kronigschen Multiplettintensitäten identisch, wenn man diese mit Hilfe unserer Tabelle 1 übersetzt\*\*\*. Diese Übersetzung liefert auch die Zeemaneffektintensitäten im schwachen Felde unmittelbar\*\*\*\*.

\* Analog der Regel beim Paschen-Back-Effekt gewöhnlicher Multipletts, wo  $M_S$  sich nicht ändern darf.

\*\* E. Back u. S. Goudsmit, l. c.

\*\*\* Man vergleiche die Arbeit über Wismuthyperfeinstruktur in diesem Heft S. 1 ff.

\*\*\*\* Es muß bemerkt werden, daß die Störungsrechnungen von Darwin, welchen wir hier gefolgt sind, sich für die Betrachtungen in starken Feldern viel besser eignen als für die Beschreibung des Zeemaneffektes in schwachen Feldern. Dies hängt damit zusammen, daß die ungestörten Eigenfunktionen bei Darwin gerade die im sehr starken Felde sind. (D. h. hier „vernachlässigbare Wechselwirkung zwischen Kern- und Elektronenhüllenmagnetismus“.)

*Anwendungsbeispiele.* Das bei weitem interessanteste Beispiel ist die Thalliumlinie  $\lambda 3775$ , welche von E. Back und J. Wulff sehr eingehend in verschiedenen Feldstärken untersucht worden ist\*. Die Übereinstimmung mit den Rechnungen ist so ausgezeichnet, daß man dies nicht so sehr als eine Bestätigung der Theorie, sondern viel mehr als einen Beweis für die außerordentliche Genauigkeit der experimentellen Ergebnisse dieser Autoren betrachten kann. Für die Beschreibung dieser Linie, welche zugleich ein Rechenbeispiel für die Theorie darbietet, verweisen wir auf die betreffende Arbeit.

Wir werden uns hier ausschließlich mit der Anwendung auf Wismutlinien beschäftigen. Wegen der beträchtlichen Größe des Kernmoments ( $I = 4\frac{1}{2}$ ) sind die Zeemaneffekte sehr kompliziert, und es läßt sich die Rechnung nicht so leicht mit der Beobachtung vergleichen. Dennoch zeigt sich auch hier die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment viel schöner, als man bei der Kompliziertheit der Linien hätte erwarten können.

Wir wollen zuvor betonen, daß nur die Rechnungen von uns herrühren. Die Aufnahmen sind von E. Back mit dem großen Tübinger Gitter gemacht worden und sie sind eigentlich ein Teil einer anderen Arbeit in diesem Heft\*\*. Es war uns sehr wertvoll, unsere Formeln an diesen Ergebnissen prüfen zu können, und wir sind Herrn Back für die Überlassung seines schönen Materials sehr zu Dank verpflichtet.

#### *Beschreibung der Figuren 4 bis 13.*

Alle Aufnahmen sind im selben Felde von 43350 Gauß gewonnen. Die linke Figur gibt jeweils die Parallel-, die rechte die Senkrechtkomponenten. Der obere Maßstrich am unteren Bildrand bedeutet  $1 \text{ cm}^{-1}$ , der untere  $0,1 \text{ \AA}$ . Das Photometer vergrößerte die Originalplatten 33mal.

Die Figuren unterhalb der Photometerkurven stellen die Rechenergebnisse dar. Bei unauflösbaren Komponentengruppen wurde ein Rechteck gezeichnet, dessen Ränder die Lage der äußeren Komponenten und dessen Inhalt die Gesamtintensität angeben. Wenn mehrere solcher Gruppen sich überlagerten, wurden diese stufenweise aufgebaut. Es ist selbstverständlich, daß ein solches Verfahren nicht ganz einwandfrei ist, aber wegen der ungeheuren Kompliziertheit der Linien ist es das einzig mögliche. Andererseits sind auch die Photometerkurven nur Schwärzungskurven und sagen nur sehr wenig aus über die wirklichen Intensitätsverhältnisse. Bei einem Vergleich der Kurven soll man also nicht zuviel Wert auf die Intensitäten legen, sondern besonders die Lagen der Komponenten und deren Asymmetrien betrachten.

Die  $g$ -Werte wurden vorzugsweise aus den meist symmetrischen Aufspaltungen bestimmt\*\*\*. Für zwei Niveaus\*\*\*\*,  $^2D_{21/2}$  und  $^2P_{1/2}$ , ist der  $g$ -Wert

\* E. Back u. J. Wulff, in diesem Heft S. 31 ff.

\*\* P. Zeeman, E. Back u. S. Goudsmit, dieses Heft S. 1 ff.

\*\*\* Man vergleiche besonders E. Back u. S. Goudsmit, l.c.

\*\*\*\* Für das Termschema des Wismuts sehe man P. Zeeman, E. Back u. S. Goudsmit, dieses Heft S. 2.

durch die  $g$ -Summenregel vollständig festgelegt. In einigen Fällen jedoch mußte der  $g$ -Wert aus einem komplizierten Zeemaneffekt bestimmt werden und ist deshalb nicht sehr genau, der Fehler kann dann wohl etwa 2 bis 3% betragen.

$\lambda$  4722.  ${}^2D_{11/2}$ ,  $g = 1,225$ ;  $1_{1/2}$ ,  $g = 2,088$ . Diese Linie wurde sehr eingehend in der oben zitierten Arbeit von E. Back und S. Goudsmit besprochen. Die Aufnahme hier war mit Absicht sehr stark überbelichtet und zeigt sehr deutlich die mit  $\times$  angemarkten „verbotenen“ Komponenten. Wegen der Überbelichtung darf man die Intensität der Hauptkomponenten (maximale Schwärzung) nicht mit denen der verbotenen Komponenten vergleichen. Die verbotenen Parallelkomponenten rühren von Übergängen her, wobei  $M_I$  um 1 springt und  $M_J$  auch um 1 in entgegengesetzter Richtung, sie liegen deshalb genau dort, wo die normalen Senkrechtkomponenten sind\*. Die ganz schwachen, aber auf der Originalplatte sehr deutlichen äußeren verbotenen Senkrechtkomponenten entsprechen einer Änderung von  $M_I$  um 1 und von  $M_J$  um 2 in der entgegengesetzten Richtung. Die wesentlich vollkommeneren neuen Aufnahmen dieser Linie, welche in dem „Nachtrag“ von E. Back und J. Wulff (dieses Heft, S. 11) vergrößert wiedergegeben sind, lagen bei Ausführung der Photometrierung noch nicht vor.

Es wurde früher \*\* mitgeteilt, daß die normalen Parallel- und äußeren Senkrechtkomponenten einen unerklärten Intensitätsabfall nach innen zeigen. Die jetzigen Rechnungen zeigen, daß dies durch eine ungleichmäßige Lagerung der unaufgelösten Komponenten jeder Gruppe vorgetäuscht ist. Die Einzelkomponenten rücken nach außen zu näher zusammen, was eine größere Schwärzung verursacht.

$\lambda$  4121.  ${}^2P_{1/2}$ ,  $g = 0,667$ ;  $5_{1/2}$ ,  $g = 1,30$ . Wegen der großen Hyperfeinstruktur der beiden Niveaus befindet sich diese Linie in einem Aufspaltungstadium etwa mitten zwischen „schwachem Feld“ und „Paschen-Back-Effekt“. Weil für beide Niveaus  $J = 1/2$  ist, so konnten die Rechnungen für diese Linie exakt durchgeführt werden. Die Auflösung der inneren Senkrechtkomponenten ist nur vorgetäuscht, es ist die Überlagerung von 19 unregelmäßig verteilten Einzelkomponenten. Die Auflösung einiger wirklicher Einzelkomponenten im Parallelbild ist auf der Originalplatte viel deutlicher als in der Photometerkurve.

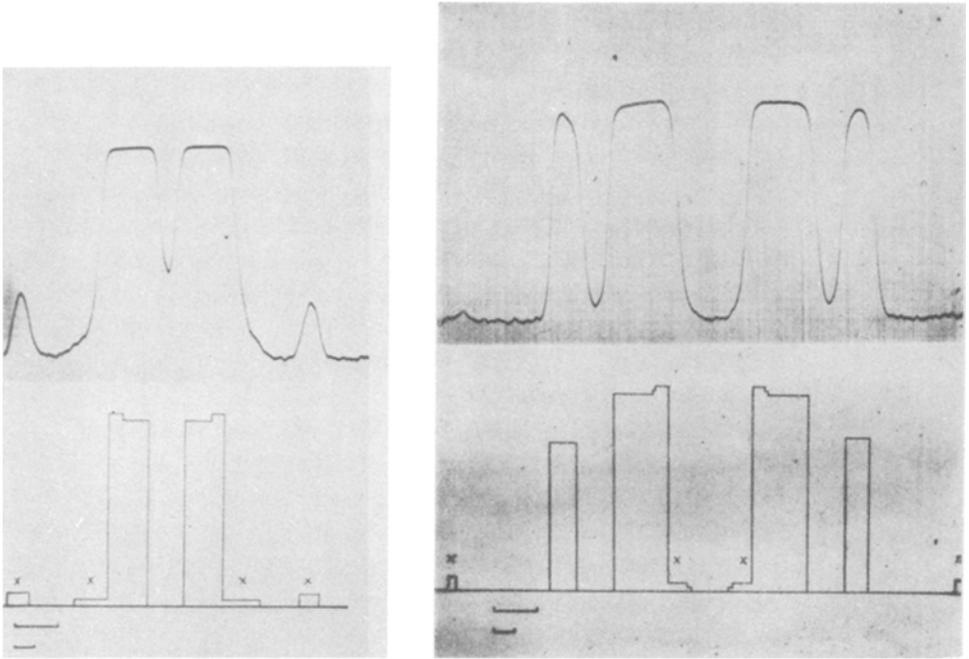
$\lambda$  3596.  ${}^2P_{1/2}$ ,  $g = 0,667$ ;  $8_{11/2}$ ,  $g = 0,98$ . Das Zeemanbild ist sehr verwickelt und gedrängt und eignet sich deshalb nicht sehr für einen Vergleich mit der Rechnung.

$\lambda$  3511.  ${}^2D_{21/2}$ ,  $g = 1,20$ ;  $2_{11/2}$ ,  $g = 0,79$ . Die Komponenten dieser sehr interessanten Linie wurden in zweiter Näherung berechnet und man sieht, daß die Lagenasymmetrien in schöner Übereinstimmung sind mit den Beobachtungen. In der Mitte der Senkrecht- und auf der Außenseite der Parallelkomponenten sind Spuren von verbotenen Komponenten vorhanden.

---

\* Man muß deshalb peinlich darauf achten, daß nicht mangelhafte Polarisation im Spektralapparat diese Komponenten vortäuscht!

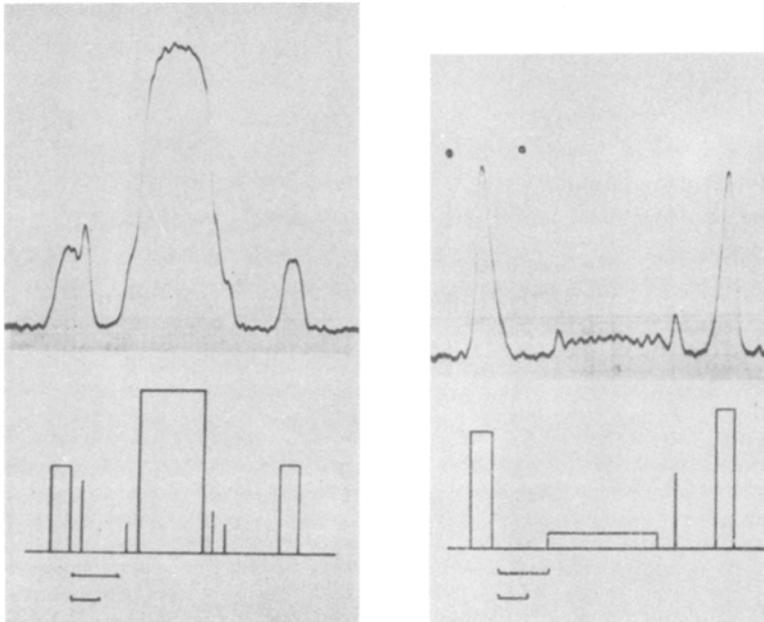
\*\* E. Back u. S. Goudsmit, l. c.



||

Fig. 4.  $\lambda$  4722. 2. Ordnung.

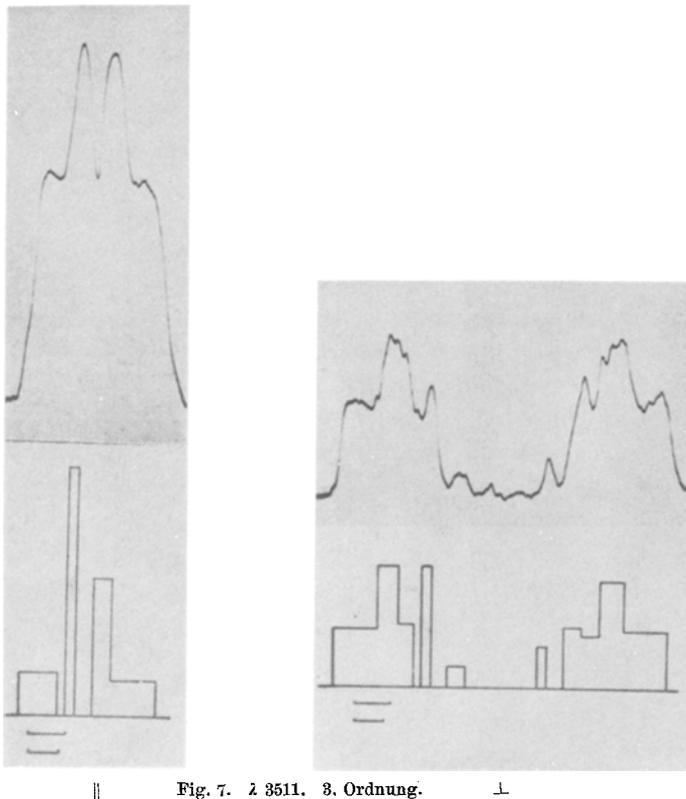
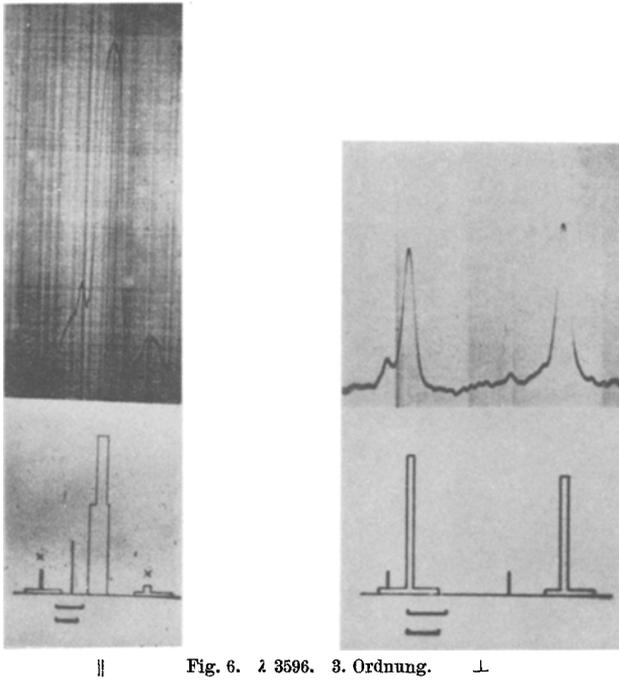
⊥

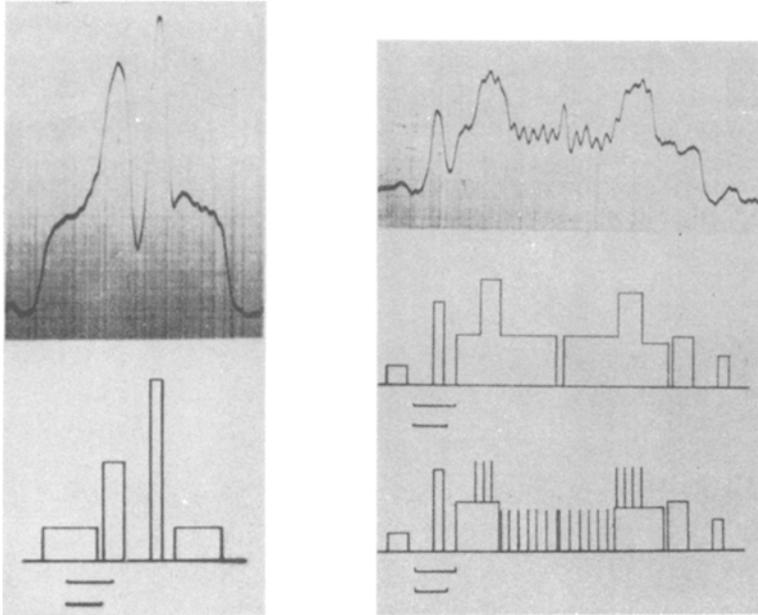


||

Fig. 5.  $\lambda$  4121. 2. Ordnung.

⊥

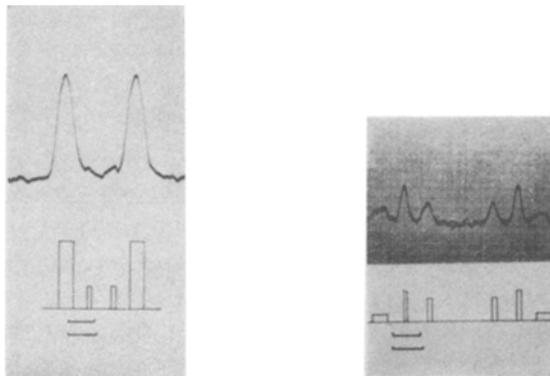




||

Fig. 8.  $\lambda$  3897. 4. Ordnung.

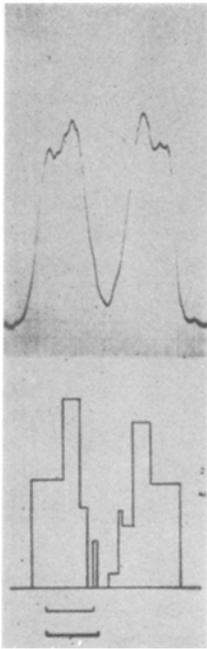
⊥



||

Fig. 9.  $\lambda$  3076. 3. Ordnung.

⊥



||

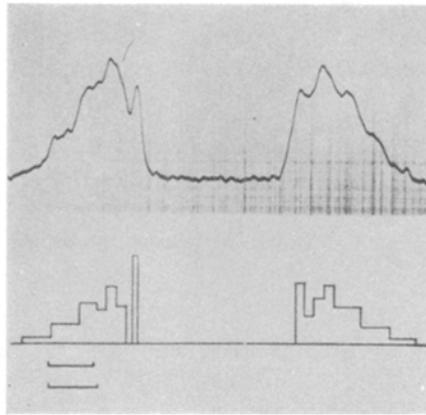
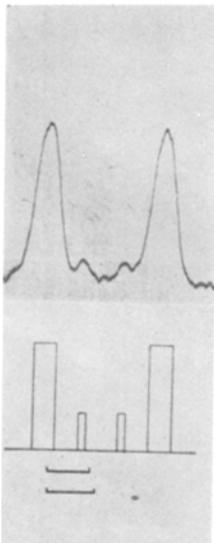


Fig. 10.  $\lambda$  3024. 5. Ordnung.  $\perp$



||

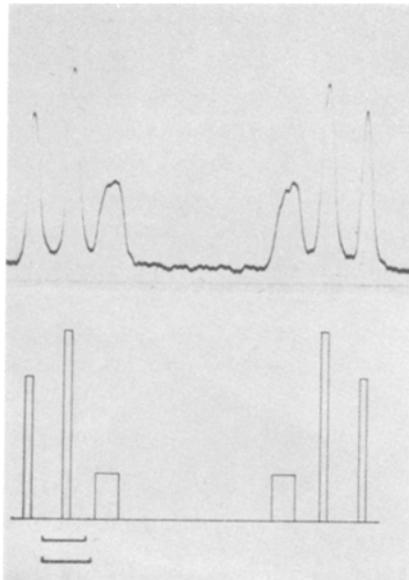
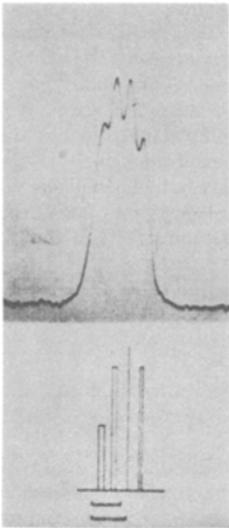


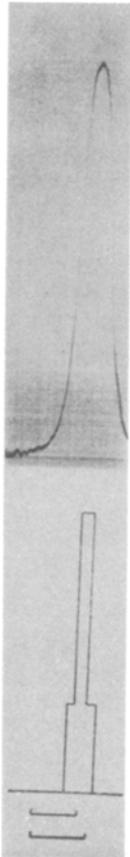
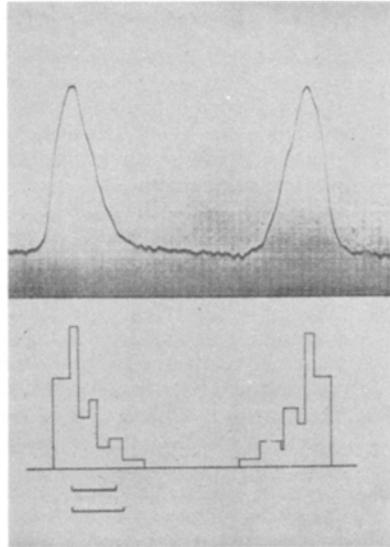
Fig. 11.  $\lambda$  2989. 5. Ordnung.  $\perp$



||

Fig. 12.  $\lambda$  2938. 5. Ordnung.

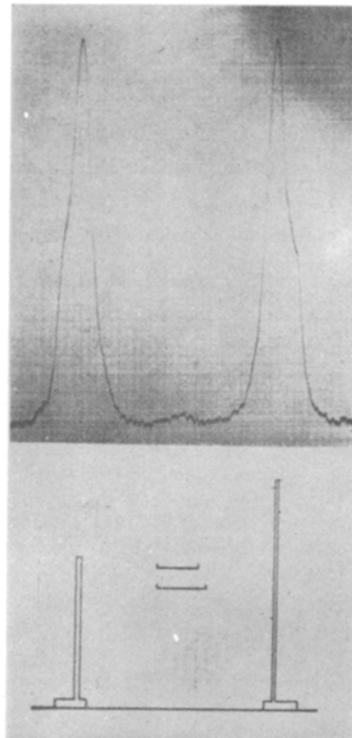
⊥



||

Fig. 13.  $\lambda$  2898. 5. Ordnung.

⊥



- $\lambda$  3397.  ${}^2D_{21/2}$ ,  $g = 1,20$ ;  $4_{11/2}$ ,  $g = 1,676$ . Sehr schöne Übereinstimmung zwischen Berechnung und Beobachtung. Auf der Außenseite der Parallelkomponenten sind verbotene Linien schwach angedeutet. Die inneren Senkrechtkomponenten sind vollständig aufgelöst. Um völlige Übereinstimmung zu erhalten (Zusammenfallen der beiden innersten Komponenten), war es notwendig, die ganz enge Aufspaltung des Anfangszustandes (total etwa  $0,1 \text{ cm}^{-1}$ ) mit zu berücksichtigen.
- $\lambda$  3076.  ${}^2D_{11/2}$ ,  $g = 1,225$ ;  $2_{11/2}$ ,  $g = 0,79$ . Beide Niveaus haben eine sehr enge Hyperfeinstruktur, weshalb diese nur in einer Verbreiterung der übrigens normalen Zeemankomponenten zum Ausdruck kommt. Man hat hier also vollständigen Paschen-Back-Effekt.
- $\lambda$  3024.  ${}^2D_{21/2}$ ,  $g = 1,20$ ;  $7_{21/2}$ ,  $g = 1,41$ . Komplizierte Linie in guter Übereinstimmung mit den Berechnungen. Es zeigt sich hier deutlich, daß die Höhen der berechneten und der Schwärzungskurven nur mit Vorbehalt miteinander verglichen werden dürfen.
- $\lambda$  2989.  ${}^2D_{11/2}$ ,  $g = 1,225$ ;  $4_{11/2}$ ,  $g = 1,676$ . Eingehende Besprechung dieser Linie bei E. Back und S. Goudsmit. Vollständiger Paschen-Back-Effekt.
- $\lambda$  2938.  ${}^2D_{21/2}$ ,  $g = 1,20$ ;  $8_{11/2}$ ,  $g = 0,98$ . Die Einzelheiten der Senkrechtkomponenten sind in der beobachteten Kurve nur mangelhaft angedeutet, trotzdem ergibt sich eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Berechnung und Beobachtung. Aus der Asymmetrie der Parallelkomponenten geht hervor, daß der Paschen-Back-Effekt noch nicht vollständig ist.
- $\lambda$  2898.  ${}^2D_{11/2}$ ,  $g = 1,225$ ;  $5_{1/2}$ ,  $g = 1,30$ . Weil die beiden  $g$ -Werte so nahe einander gleich sind, überlagern sich die Komponenten. Obwohl die Linie dadurch ziemlich symmetrisch aussieht, so ist der Paschen-Back-Effekt doch noch nicht ganz vollständig und, besonders auf den Originalaufnahmen, sind schwache Spuren von verbotenen Komponenten vorhanden.

Zusammenfassend glauben wir es als einen schönen Erfolg für die Theorie betrachten zu dürfen, daß man solche verwickelten Zeemaneffekte, wie die oben beschriebenen, in allen Einzelheiten verstehen kann. Wesentlich dafür ist die Genauigkeit der uns zur Verfügung gestellten Tübinger Aufnahmen, welche die Beobachtung solcher Einzelheiten ermöglichten.

*Ann Arbor (Michigan)*, Department of Physics, University of Michigan,  
Juni 1930.